

Geodetisk och fotogrammetrisk mättnings- och beräkningsteknik



Version 2021-10-14



Geodetisk och fotogrammetrisk mättnings- och beräkningsteknik
by [Lantmäteriet m.fl.](https://www.lantmateriet.se) is licensed under a
[Creative Commons Erkännande-Ickekommersiell-IngaBearbetningar 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/).

Förord

Detta kompendium har tagits fram i samarbete mellan Lantmäteriet (LM), Kungliga tekniska högskolan (KTH), Lunds universitet (LU) och Högskolan i Gävle (HiG). Kompendiet är avsett för grundläggande kurser inom geodetisk och fotogrammetrisk mätningsteknik (samhällsmätning) samt ingå i en revidering av Handbok till Mätningsskugörelsen (HMK).

Framtagandet av kompendiet har skett genom finansiering från författarnas arbetsgivare, samt via ett ekonomiskt bidrag från Kartografiska Sällskapet (KS; se www.kartografiska.se).

I slutet av flera kapitel finns lästips för vidare läsning. Vidare finns referenser, sakordsregister och förkortningsregister i slutet av kompendiet.

Vissa kapitel är helt nyskrivna medan andra är sammanställningar/justeringar av andras texter. Bakgrunden till varje kapitel framgår i kapitlets slut under rubriken ”Tack”.

Kompendiet är skyddat med licensen creative commons by-nc-nd. Det innebär att det är fritt att sprida kompendiet, men endast i icke-kommersiella sammanhang. Vidare får verket inte bearbetas och den som använder verket måste ange upphovsmannen; upphovsmannen i detta fall är ”Lantmäteriet m.fl.”. Det är tillåtet att kopiera upp kompendiet och sälja det för självkostnadspris (=tryckkostnad plus eventuell fraktkostnad). Mer information om licensfrågor finns på:

<http://www.creativecommons.se/>.

Kapitel 1–11 reviderades grundligt 2021 av Jonas Ågren, Lars Harrie och Milan Horemuz. Endast mindre ändringar gjordes då för kapitel 12–15.

Flera personer, inte minst studenter, har lämnat bra synpunkter på tidigare versioner av kompendiet som har hjälpt till vid uppdateringen. Även flera lärare har gett kommentarer.

Kapitelansvariga:

Kap 1: Lars Harrie (LU)

Kap 2 – 4: Lars Harrie (LU) och Jonas Ågren (HiG/LM)

Kap 5: Bengt Andersson (LM)

Kap 6 – 9: Clas-Göran Persson (LM)

Kap 10 – 11: Milan Horemuz (KTH)

Kap 12 – 14: Anders Boberg (Tyréns)

Kap 15: Perola Olsson (LU), Helen Rost (I-CONIC Vision) och Yuriy Reschetiuk (Sweco Sverige AB)

Till kompendiet finns en formelsamling i ett separat dokument.

1	INTRODUKTION	1
1.1	GEOGRAFISK INFORMATION	1
1.2	INMÄTNING AV GEOGRAFISK INFORMATION	2
1.3	AKTÖRER VID INMÄTNING AV GEOGRAFISK INFORMATION	4
1.4	KOMPETENSKRAV FÖR INMÄTNING AV GEOGRAFISK INFORMATION	5
1.5	UPPLÄGG AV KOMPENDIET	5
1.5.1	Del 1: Koordinatsystem och referenssystem	6
1.5.2	Del 2: Grundläggande mätningsteknik	6
1.5.3	Del 3: Satellitmätning	6
1.5.4	Del 4: Fotogrammetri och laserskanning	7
1.5.5	Exempel i kompendiet	7
1.6	MÅLGRUPP	7
2	JORDMODELLER	9
2.1	JORDELLIPSOIDER	9
2.2	KOORDINATSYSTEM	11
2.2.1	Koordinatsystem på en sfärisk jordmodell	11
2.2.2	Koordinatsystem på en jordellipsoid	14
2.2.3	Gradnät	17
2.3	AVSTÅNDSBERÄKNING PÅ SFÄR OCH JORDELLIPSOID	17
2.4	OLIKA TYPER AV HÖJD	20
2.4.1	Jordens fundamentalytor	20
2.4.2	Höjd över geoiden	21
2.4.3	Höjd över ellipsoiden	23
2.4.4	Geoidhöjd	23
3	KARTPROJEKTIONER	25
3.1	PRINCIPIELL UPPBYGGNAD	26
3.2	EGENSKAPER OCH GEOMETRISKA DISTORTIONER	29
3.3	BESKRIVNING AV NÅGRA VANLIGA KARTPROJEKTIONER OCH DESS PARAMETRAR	31
3.3.1	Några vanliga kartprojektioner	31
3.3.2	Kartprojektionsparametrar	33
3.3.3	Val av kartprojektion och kartprojektionsparametrar	34
3.3.4	Universal Transversal Mercator (UTM)	34
3.4	FORMLER FÖR KARTPROJEKTIONER	36
3.4.1	Matematisk bakgrund	36
3.4.2	Härledning av Mercator-projektionen	36
3.4.3	Formler för transversal Mercator-projektion	39
3.5	KARTPROJEKTIONS- OCH LUTNINGSKORRIGERING AV MÄTNINGAR	40
4	GEODETISKA REFERENSSYSTEM	43
4.1	INTRODUKTION	43
4.2	TREDIMENSIONELLA REFERENSSYSTEM	44
4.2.1	Globala referenssystem	44
4.2.2	SWEREF 99	46
4.2.3	SWEREF 99 TM	48
4.2.4	SWEREF 99 med lokala kartprojektioner	50
4.2.5	Indexsystem för SWEREF 99 TM	51
4.3	PLANA REGIONALA REFERENSSYSTEM	52
4.3.1	RT 90	53
4.3.2	Kommunala referenssystem	54
4.4	HÖJDSYSTEM	54
4.4.1	Definition av geodetiska höjdsystem	54
4.4.2	RH 2000	55
4.4.3	RH 00, RH 70 och kommunala system	56
4.5	GEOIDMODELLER	57

4.5.1	SWEN17_RH2000.....	58
4.5.2	Utblick: GNSS/geoid-baserade höjdsystem	59
4.6	KOORDINATTRANSFORMATION	59
4.6.1	Analytisk transformation	60
4.6.2	Empirisk transformation i två dimensioner	61
4.6.3	Empiriska transformationer i tre dimensioner.....	65
4.6.4	Transformation mellan RT 90 2,5 gon V och SWEREF 99 TM.	66
5	MÄTINSTRUMENT.....	69
5.1	VINKELMÄTNINGSINSTRUMENT.....	69
5.1.1	Teodoliten.....	69
5.1.2	Kontroll och justering av teodoliter	73
5.2	LÄNGDMÄTNINGSINSTRUMENT.....	75
5.2.1	EDM-instrument	75
5.2.2	Kontroll av EDM-instrument	79
5.3	KOMBINERADE VINKEL- OCH LÄNGDMÄTNINGSINSTRUMENT.....	81
5.3.1	Totalstation.....	81
5.3.2	Terrester laserskanner.....	81
5.4	INSTRUMENT FÖR HÖJDMÄTNING.....	82
5.4.1	Avvägningsinstrument.....	82
5.4.2	Kontroll och justering av avvägningsinstrument	87
5.4.3	Laserinstrument.....	87
6	TERRESTRA MÄTMETODER	89
6.1	GRUNDLÄGGANDE MÄTSTORHETER.....	89
6.1.1	Koordinatsystem.....	89
6.1.2	Orienterad riktning (bäring) och avstånd	90
6.1.3	Horisontalvinkelmätning	92
6.1.4	Vertikalvinkelmätning och dess tillämpning.....	93
6.2	PLANMÄTNING	94
6.2.1	De elementära punktbestämningsmetoderna.....	94
6.2.2	Plana geodetiska nät	95
6.2.3	Beräkning av polygontåg.....	96
6.3	HÖJDMÄTNING	100
6.3.1	Geodetiska höjdnät.....	100
6.3.2	Avvägning.....	101
6.3.3	Trigonometrisk höjdmätning	104
7	DETALJMÄTNING	109
7.1	TILLÄMPNINGAR.....	109
7.2	DETALJMÄTNINGSPROCESSEN	111
7.2.1	Grundläggande principer.....	111
7.2.2	Traditionell stationsetablering.....	112
7.2.3	Fri station.....	113
7.2.4	Inmätning	115
7.2.5	Utsättning.....	117
7.2.6	Kontroll	118
7.2.7	Markering	118
7.2.8	Mätninganvisningar.....	119
7.2.9	Dokumentation.....	119
7.2.10	Beräkning av arean av en polygon.....	120
7.3	DETALJMÄTNINGENS UTVECKLING	121
8	MÄTOSÄKERHET	123
8.1	GUM	123
8.1.1	Historik.....	123
8.1.2	Grundfilosofi	123

8.2	STANDARDOSÄKERHET	124
8.3	VAD ÄR EN MÄTNING?	125
8.4	SAMMANLAGD STANDARDOSÄKERHET	125
8.5	MÄTNINGAR MED OLIKA VIKT	127
8.6	UTVIDGAD MÄTOSÄKERHET	129
8.7	EN ENKEL GUM-KOKBOK	131
8.8	TERMINOLOGISKA JÄMFÖRELSE	131
8.8.1	Svensk-engelsk GUM-ordlista	131
8.8.2	Jämförelse med äldre svensk terminologi.....	132
8.8.3	Jämförelse med terminologi i matematisk statistik.....	132
8.9	TOLERANSER OCH HMK.....	133
9	MINSTA-KVADRATBERÄKNINGAR MED MATRISER	137
9.1	GRUNDLÄGGANDE MATRISALGEBRA OCH NOTATIONER.....	137
9.2	ELEMENTUTJÄMNING ENLIGT MK-METODEN	138
9.2.1	Samma vikt på observationerna	138
9.2.2	Olika vikter på observationerna.....	141
9.2.3	Korrelation och analys av funktioner av obekanta	143
9.3	LINJÄR REGRESSION.....	144
9.4	EXEMPEL PÅ MK-SKATTNING: DUBBEL KNUTPUNKT I ETT HÖJDNÄT	148
9.5	NÄRMEVÄRDEN OCH LINJÄRISERING.....	151
9.5.1	Närmevärden.....	151
9.5.2	Ett alternativ till viktsmatris	152
9.5.3	Linjärisering	155
10	GNSS.....	161
10.1	GRUNDLÄGGANDE PRINCIP FÖR SATELLITMÄTNINGAR	161
10.2	UPPBYGGNAD AV GNSS	163
10.2.1	Rymdsegmentet	163
10.2.2	Kontrollsegmentet	165
10.2.3	Användarsegmentet.....	165
10.3	AVSIKTLIGA STÖRNINGAR I SATELLITSIGNALEN	167
10.4	OBSERVATIONSEKVATIONER.....	167
10.4.1	Observationsekvation för kodmätning	167
10.4.2	Observationsekvation för fasmätning.....	168
10.5	FELKÄLLOR	168
10.5.1	Satellitrelaterade felkällor	169
10.5.2	Atmosfärsrelaterade fel och flervägsfel.....	169
10.5.3	Mottagarrelaterade fel.....	170
10.5.4	Observationsekvationer med felkällor	170
10.6	MATEMATISK MODELL FÖR POSITIONSBESTÄMNING	170
10.6.1	Absolutpositionering	170
10.6.2	Relativpositionering	172
10.7	SAMMANFATTNING.....	173
10.1	ORDLISTA	174
11	GNSS-MÄTNING.....	175
11.1	ABSOLUTMÄTNING	176
11.2	STATISK RELATIVMÄTNING	177
11.3	KINEMATISK RELATIVMÄTNING	178
11.4	DIFFERENTIELLA METODER	179
12	FOTOGRAMMETRI OCH FLYGBILDER.....	181
12.1	BEGREPPET FOTOGRAMMETRI	181
12.2	DIGITALA KAMEROR OCH BILDER	183
12.2.1	Kameran.....	183
12.2.2	Den digitala bilden	185

12.2.3	Bildskanning.....	186
12.3	ENKELBILDENS GEOMETRI	186
12.3.1	Centralprojektion och bildskala	186
12.3.2	Radiell höjddeplacering.....	189
12.3.3	Mätkameran	190
12.3.4	Inre och yttre orientering. Kalibrering.....	193
12.3.5	Kolinearit.....	198
13	FOTOGRAMMETRISKA METODER	201
13.1	ENKELBILDSMETODER	201
13.1.1	Fotokarta	201
13.1.2	Rektifiering.....	201
13.1.3	Ortofoto	201
13.1.4	Snedperspektiv.....	204
13.2	STEREOFOTOGRAMMETRI	204
13.2.1	Stereoskopisk mätning.....	204
13.2.2	Stereofotogrammetrins normalfall.....	209
13.2.3	Stereofotogrammetrins allmänna fall	213
13.2.4	Blocktriangulering.....	218
13.2.5	Digital fotogrammetri.....	220
13.2.6	Instrument för mätning i fotografiska bilder	223
13.3	FOTOGRAMMETRISK MÄTOSÄKERHET	225
13.3.1	Kvalitetsbegrepp	225
13.3.2	Normalfallets mätosäkerhet.....	226
13.3.3	Övriga felkällor. Tumregler	228
14	FOTOGRAMMETRISKA TILLÄMPNINGAR.....	229
14.1	STORSKALIG KARTFRAMSTÄLLNING	229
14.1.1	Primärkartverk och kartprogram	229
14.1.2	Den fotogrammetriska kartprocessen	231
14.1.3	Planering av flygfotografering. HMK.....	231
14.1.4	Planering av stödpunkter.....	237
14.1.5	Fotogrammetrisk detaljmätning.....	239
14.2	DIGITALA HÖJDMODELLER	241
14.2.1	Fotogrammetrisk mätning av höjdmodeller.....	241
14.2.2	Höjdmodellens kvalitet och användning.....	243
14.3	SMÅSKALIG KARTFRAMSTÄLLNING	244
14.3.1	Omdrevsfotografering	244
14.3.2	Framställningsteknik. Fotokartor.....	244
14.4	MARKFOTOGRAMMETRI	246
14.4.1	Kameratyper	246
14.4.2	Markfotogrammetrins normalfall.....	247
14.4.3	Markfotogrammetrins allmänna fall	248
14.4.4	Markfotogrammetrins mätosäkerhet.....	249
14.4.5	Tillämpningsområden	249
14.4.6	Planering av markfotogrammetri med "3x3-metoden".....	250
15	LASERSKANNING.....	253
15.1	INTRODUKTION	253
15.2	PRINCIPEN FÖR FLYGBUREN LASERSKANNING.....	253
15.3	TEKNIKEN BAKOM FLYGBURNA LASERSKANNINGSSYSTEM	254
15.3.1	Bestämning av skanningsenhetens position	255
15.3.2	Bestämning av laserpulsens riktning	256
15.3.3	Bestämning av avståndet till reflektionspunkten	257
15.3.4	Felkällor.....	257
15.4	VIKTIGA BEGREPP VID FLYGBUREN LASERSKANNING	258
15.5	PRAKTISK MÄTNING MED FLYGBUREN LASERSKANNING.....	260

15.5.1	Tillämpningar av flygburen laserskanning.....	260
15.5.2	Planering vid flygburen laserskanning.....	262
15.5.3	Beräkningar vid flygburen laserskanning.....	264
15.6	PRINCIPEN FÖR TERRESTER LASERSKANNING.....	266
15.7	FUNKTION AV EN TERRESTER LASERSKANER.....	268
15.8	DATABEARBETNING I TERRESTER LASERSKANNING	270
15.8.1	Registrering och georeferering	270
15.8.2	Modellering.....	276

Referenser

Sakordsregister

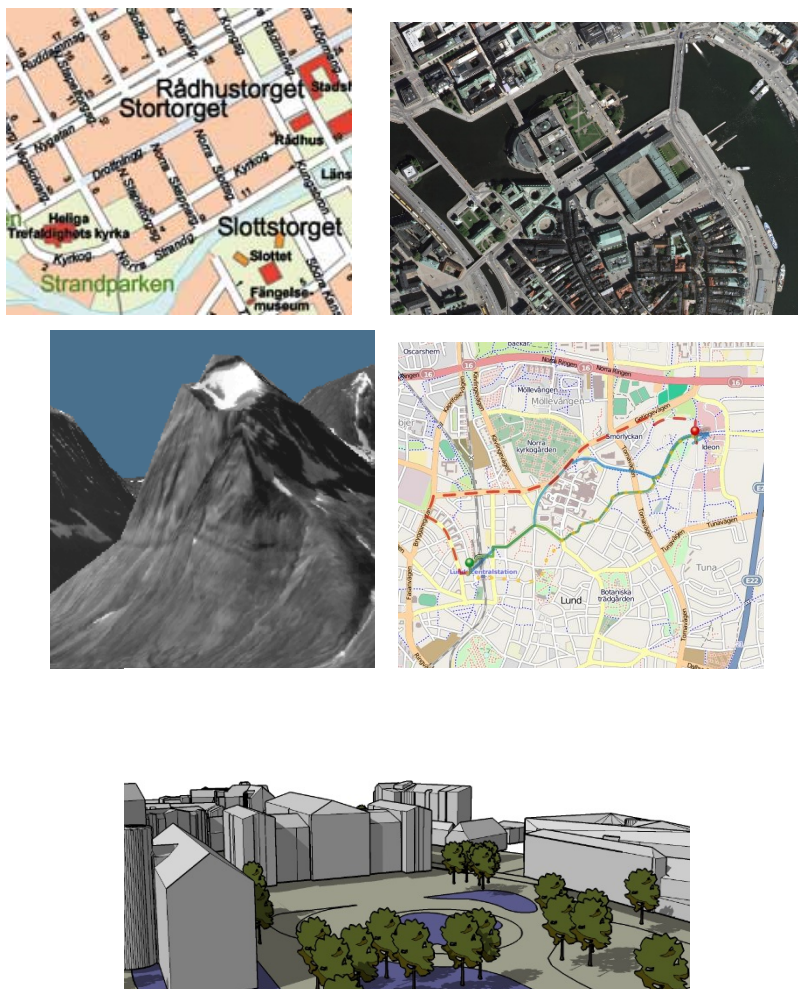
Ordförklaringar fotogrammetri

Förkortningsregister

1 Introduktion

1.1 Geografisk information

En stor andel av den information som idag hanteras har en rumslig koppling. Denna information brukar ofta benämnas *geografisk information*. Traditionellt har geografisk information främst utgjorts av kartor (på papper eller digitala), men idag finns flertalet andra informationskällor som klassas som geografiska, t.ex. flyg- och satellitbilder, byggnadsregister, fastighetsregister, projekteringsunderlag, databaser om miljöinformation och tredimensionella stadsmodeller (Figur 1.1).



Figur 1.1. Exempel på geografisk information. Källa: Lantmäteriet, Lunds kommun, OpenStreetMap.

Tillämpningarna med användning av geografisk information är omfattande. Informationen är bland annat viktig inom flera samhällsbyggnadstillämpningar. För att planera nya byggnader och vägar krävs planeringskartor som kan ligga till grund för politiska beslut; vidare behövs informationen för att bestämma de ägarrettsliga förhållandena (vem äger vad?) och inte minst är geografisk information oundgänglig i själva bygg- och anläggningsprocessen. Men det är inte bara i professionella sammanhang som vi använder geografisk information. I dag använder vi som privatpersoner dagligen geografisk information på webben (eller i mobilen) när vi t.ex. behöver hitta hem till en kompis, söker efter nya lägenheter hos fastighetsmäklarna eller turistar i en okänd stad.

För att möjliggöra tillämpningar med geografisk information behövs tekniker och metoder för att *samla in (genom mätningar)*, *lagra*, *analysera* och *visualisera (presentera)* informationen. Metoder för att lagra och analysera studeras främst inom ämnesområdet *geografisk informationsteknik* (eller som det ofta kallas *geografiska informationssystem, GIS*) och visualisering studeras främst inom *kartografin*. Detta kompendium kommer inte att beskriva denna del av hanteringen av geografisk information, utan istället koncentrera sig på den första delen av processen, nämligen på att mäta in geografisk information.

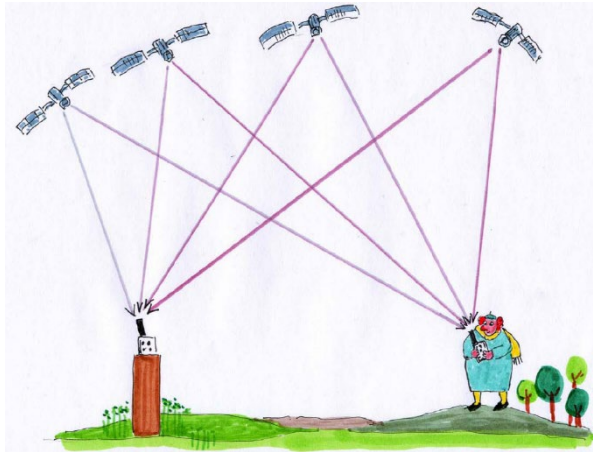
1.2 Inmätning av geografisk information

Inmätning av geografisk information baseras på att man bestämmer koordinater (i ett väl definierat koordinatsystem) för punkter på marken. Dessa punkter kan beskriva naturliga fenomen som sjöar och berg samt mänskliga byggnationer som hus och vägar. För att bestämma dessa koordinater används i princip tre olika typer av mätmetoder. Antingen mäter man avstånd, vinklar m.m. mellan enskilda punkter och beräknar koordinater ur dessa mätningar; detta benämns *geodetiska mätmetoder*. Den andra typen av mätmetod baseras sig på mätningar av koordinater utifrån flyg- och satellitbilder, vilket benämns *fotogrammetriska* (eller *fjärranalytiska*) mätmetoder. Slutligen kan man med hjälp av lasermätning skanna av ett område; i dessa mätningar skapas ett punktmoln där varje punkt motsvarar en returnerad laserstråle. Geografiskinformation kan sedan extraheras ur punktmolnet.

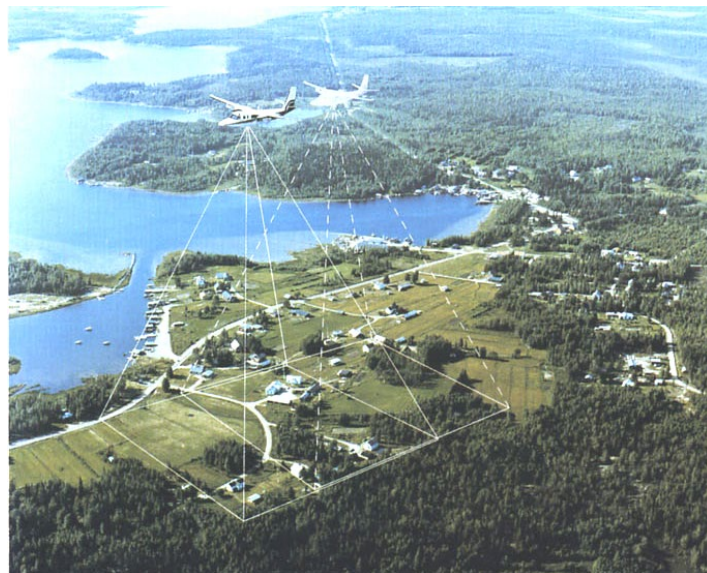
Fram till för ett par årtionden sedan var i stort sett alla geodetiska mätningar terrestra (markbundna). Vid terrester mätning görs alla mätningar på marken. Den terrestra mätningen har emellertid de senaste 30 åren fått stark konkurrens av satellitmätningar. Dessa mätningar utförs med hjälp av positioneringssatelliter, vilket är en annan typ av satelliter än de som används för att ta bilder på jorden. I en satellitmätning mäter man inte primärt avstånd mellan punkter på marken utan istället avstånd mot satelliter. Om man samtidigt mäter avståndet från flera punkter på marken mot samma satelliter kan man bestämma de relativa avstånden mellan punkterna på marken med låg mätosäkerhet (Figur 1.2). I dagsläget används både terrester teknik och satellit teknik; något förenklat kan man säga att för mätningar inom ett litet område är terrester mätning ofta ett bra alternativ, medan satellitmätningar är överlägsna när man vill mäta mellan punkter på längre avstånd. Både terrestra mätningar och satellitmätningar studeras inom ämnesområdet *geodesi* (därav begreppet geodetiska mätmetoder). Geodesi är vetenskapen om jordens uppmätning och det är ett av de klassiska naturvetenskapsområdena.

För att mäta in stora mängder geografisk information är geodetiska mätmetoder ofta för dyra. Om man t.ex. ska skapa en ny databas med geografisk information över en stad, krävs det att man mäter in alla vägar, hushörn o.s.v., vilket är mycket tidskrävande. En mer rationell metod är då att använda flyg- och/eller satellitbilder (Figur 1.3) och/eller laserskannade punktmoln (Figur 1.4). Flyg- och satellitbilder behandlas med fotogrammetriska metoder, där fotogrammetrin är vetenskapen om geometriska mätningar i bilder. För att mäta in geografisk information ur en bild måste man ha kunskap om geometrin i bilderna samt hur man ur flera bilder kan skapa tredimensionella modeller. På liknande vis krävs det att man har kunskap om geometrin i ett punktmoln genererat från lasermätningar för att möjliggöra informationsinhämtning därifrån.

Kapitel 1: Introduktion



Figur 1.2. Genom att mäta mot samma satelliter från två punkter kan det relativa avståndet mellan punkterna mätas med liten mätosäkerhet. Källa: GIS-centrum, Lunds universitet.



Figur 1.3. Insamling av geografisk information med hjälp av flygbilder. Vid överlappande bilder kan man genom fotogrammetriska metoder göra en tredimensionell modell av verkligheten. Källa: Metria, Lantmäteriet.



Figur 1.4. Insamling av geografisk information med hjälp av laserskanning. Till vänster är ett punktmoln där punkterna har klassificerats automatiskt. Till höger är ett bullerplank som extraherats ur punktmolnet. Källa: Gustaf Ugglå, KTH.

1.3 Aktörer vid inmätning av geografisk information

Inmätning av geografisk information sker idag både av offentliga och privata aktörer. För den grundläggande geografiska informationen är de största aktörerna Lantmäteriet (på nationell nivå) och kommuner (på lokal nivå). Med grundläggande geografisk information menar vi information som används inom flera olika sektorer och för flera typer av tillämpningar, exempelvis information om markanvändning, infrastruktur, adresser och topografi (höjder).

Lantmäteriet har ansvaret för att mäta in och förvalta stora delar av den rikstäckande grundläggande geografiska informationen. En fördel med denna information är att den är homogen en nackdel är att den inte är tillräckligt detaljerad för alla tillämpningar. Själva inmätningen av informationen utförs av Lantmäteriet (eller annan ansvarig myndighet) eller av konsultfirmor. Den största andelen av den rikstäckande geografiska informationen har samlats in med fotogrammetriska metoder, men även geodetiska metoder är vanliga (används t.ex. vid inmätning av nya fastigheter). För att ta fram rikstäckande höjdmodeller har flygburen laserskanning använts.

Ansvaret för inmätningen av den mer detaljerade geografiska informationen ligger främst hos kommunerna; detta är en del av kommunens ansvar för samhällsplanering och samhällsbyggnad. I medelstora och stora kommuner finns det i regel ett mätningsskontor som ansvarar för mätningarna. Dessa mätningsskontor är en del av stadsbyggnadsavdelningen (eller liknande avdelning).

Lantmäteriet och kommunerna har ett delvis överlappande ansvar vad gäller inmätning och förvaltning av den geografiska informationen. En hel del detaljerad geografisk information som mätts in av kommuner skickas vidare till Lantmäteriet och blir en del av de nationella databaserna. Till exempel baserar sig den nationella digitala registerkartan (geografisk databas över Sveriges fastighetsindelning) till stor del på information som mätts in av kommuner.

Uppbyggnad och underhåll av infrastruktur kräver omfattande mätningssarbeten. Utsättning av byggnader och vägar ställer krav på mätning med låg osäkerhet, inte minst när prefabricerade byggnadsdelar används. Förhållandevis enkla mätningar behövs för byggnation av småhus, medan mycket komplicerade dito krävs vid t.ex. tunnelbyggnationer (Figur 1.5). Stora byggbolag, Trafikverket, och liknande aktörer har ofta egen mätningsspersonal som utför mätningar eller så hyr de in konsulter.



Figur 1.5. Bild från Banverket/trafikverket (fotograf: Thomas Jacobsson)

Idag finns det ett flertal privata aktörer som säljer geografisk information; vissa av dessa är internationella storbolag med miljardomsättning. De privata bolagen säljer sin information till t.ex. navigeringsföretag och fastighetsmäklarsidor. Till viss del har företagen mätt in informationen själva, och till viss del har de köpt in information från exempelvis konsultfirmor eller nationella kartverk som svenska Lantmäteriet. Det är alltså troligt att den information du ser i din navigationsapp i mobilen ursprungligen har mätts in av Lantmäteriet eller en kommun.

1.4 Kompetenskrav för inmätning av geografisk information

För att få utföra mättningsarbeten krävs att ansvarig/utförare har tillräckligt med kompetens. Tidigare reglerades behörigheten ”att självständigt utföra mätning och kartläggning” av §13 i Mättningskungörelsen (MK). Denna kungörelse upphävdes dock den 1 juli 2010. Behörighetskonstruktionen ersattes då av ett nytt koncept, ”grundläggande mätningsteknisk färdighet”, som finns publicerat på Nya HMK (se lästips nedan).

Liksom i MK §13 ställs krav på såväl skolutbildning som praktisk erfarenhet. Termen ”behörighet” har alltså ersatts av begreppet ”färdighet”, men någon nationell instans för formell prövning av färdigheten har inte etablerats. Konceptet bygger enbart på rekommendationer, som är tänkta att tillämpas direkt i dialogen mellan beställare och utförare, arbetsgivare och arbetstagare, etc.

1.5 Upplägg av kompendiet

Kompendiet är indelat i fyra delar. Dessa delar läses med fördel i ordningsföljd, men kan också delvis läsas separat. Dock förutsätter delarna 2-4 viss förståelse för koordinatsystem från del 1, och delarna 3-4 förutsätter grundläggande kännedom om mätosäkerhetsbegreppet (som beskrivs i del 2). Nedan följer en kort genomgång av kompendiets olika delar.

1.5.1 Del 1: Koordinatsystem och referenssystem

För att ange en position på jordytan används koordinater, t.ex. latitud och longitud. För att kunna kommunicera denna position till andra krävs att vi har ett gemensamt koordinatsystem. Att definiera ett sådant koordinatsystem är inget triviale problem. Målsättningen med denna del är att ge grundläggande kunskap om hur ett gemensamt koordinatsystem kan skapas. Delen inleds med ett kapitel om jordens form och geodetiska koordinatsystem. Här behandlas tekniker om hur jorden approximeras med en jordmodell och hur denna modell kan anpassas till jorden. Nästa steg, som behandlas i kapitel 3, är att avbilda läget på jordmodellen på ett platt papper eller en skärm; för att göra detta används en kartprojektion.

I kapitel 2 och 3 koncentrerar vi oss framförallt på att ange det plana läget med hjälp av koordinater, men tar även upp hur vi kan ange höjder. I dagligt tal använder vi ofta här begreppet ”meter över havet”. Vad vi i strikt mening menar med det är ”meter över geoiden”. I avsnitt 2.4 beskrivs vad geoiden är för någonting samt hur höjder definieras. I kapitel 4 behandlas vi sedan frågan hur det geodetiska koordinatsystemet läggs fast i förhållande till jordens yta, vilket resulterar i vad som kallas ett geodetiskt referenssystem.

I Sverige har det under senare år pågått ett omfattande arbete med att skapa nya koordinatsystem och referenssystem i enlighet med europeiska och globala specifikationer. Anledningen är att man vill standardisera koordinater på internationell nivå, inte minst för att underlätta användningen av moderna mätmetoder (främst satellitmetoder). I det sista kapitlet i del 1, dvs. kapitel 4, kommer vi att gå igenom grunderna för dessa nya koordinatsystem. I kapitlet beskrivs även äldre koordinatsystem eftersom dessa fortfarande används i vissa sammanhang.

1.5.2 Del 2: Grundläggande mätningsteknik

För att kunna utföra mätningar och bedöma deras kvalitet, måste vi ha en grundläggande kunskap om själva mätinstrumenten. I kapitel 0 går vi igenom de mest använda mätinstrumenten för terrester (markbunden) mätning idag.

Kapitel 6 beskriver därefter de viktigaste mätmetoderna, dvs. hur vi ur mätta avstånd och vinklar kan bestämma koordinater på punkter. Dessa mätmetoder används senare för flera olika mättillämpningar. En av de viktigaste tillämpningarna inom samhällsbyggnadsområdet är *detalj*mätning, som innebär mätning av detaljer som till exempel vägar, hus och gränser och beskrivs i kapitel 7. Detaljmätning tillämpas bland annat inom infrastrukturprojekt och förrättningsverksamhet.

Alla mätningar är behäftade med en osäkerhet. Hur stor denna osäkerhet är beror på mätinstrumentets kvalitet, val av mätmetod etc. Att behandla osäkerhet är centralt inom all inmätning av geografisk information. I kapitel 8 beskriver vi grunderna för hur man statistiskt kan behandla mätosäkerhet, och i kapitel 9 tar vi upp sådana beräkningsmetoder som används när osäkerheterna från flera mätningar behandlas tillsammans.

1.5.3 Del 3: Satellitmätning

En allt större andel av mätningarna idag utförs med satellit teknik, närmare bestämt med GNSS (eng. *Global Navigation Satellite Systems*). Den mest använda GNSS-tekniken är GPS (eng. *Global Positioning System*). Att utföra GPS-mätningar är i många fall mycket enkelt, det är bara att trycka på en knapp så får man koordinater på skärmen. Det är dock betydligt svårare att utföra beräkningar i efterhand och att utvärdera

Kapitel 1: Introduktion

osäkerheten för resultatet. För att kunna göra detta måste man ha förståelse för grunderna för själva satellitsystemet (kapitel 10) och de olika mätmetoder som kan användas (kapitel 0).

1.5.4 Del 4: Fotogrammetri och laserskanning

Kapitel 12 ger en introduktion till fotogrammetri och flygbilder, bland annat beskrivs geometriska egenskaper i bilder. Kunskap om (flyg-)bildens geometri är viktig för att förstå hur man kan extrahera geografisk information ur bilderna med hjälp av fotogrammetriska metoder. Hur dessa metoder fungerar beskrivs sedan i kapitel 13. Den sista delen om fotogrammetri (kapitel 14) beskriver olika fotogrammetriska tillämpningar som t.ex. framtagande av kommunala och nationella kartor och digitala höjdm modeller.

Kompendiet avslutas med kapitel 15, som behandlar flygburen och terrester laserskanning. Laserskanning har under de senaste decennierna kommit fram som en teknik som kan komplettera och ibland ersätta fotogrammetrin. I kapitlet beskrivs hur laserskanning går till, och hur de punktmoln som genereras kan användas för att få fram geografisk information (se t.ex. Figur 15.10. Punktmoln där punkter har klassats bl.a. som mark, vegetation och hustak (vänster) samt en modell av huset (höger). Källa: Lantmäteriet.).

1.5.5 Exempel i kompendiet

Kompendiet innehåller flertalet beräkningsexempel. Läsaren rekommenderas att följa dessa exempel noga, och särskilt för studenter är det viktigt att ni gör kopplingen till formelsamlingen. Varje exempel avslutas med en högerställd stor punkt.

1.6 Målgrupp

Kompendiet kan med fördel läsas av alla som är intresserade av metoder för att samla in geografisk information. En huvudmålgrupp är studerande på grundläggande kurser inom geodesi och samhällsmätning på de tekniska högskolorna (främst inom programmen samhällsbyggnad, lantmäteri och väg&vatten). Den matematiska nivån är därför anpassad till en student som läst grundläggande kurser inom linjär algebra, en- och flervariabelanalys samt matematisk statistik på universitetsnivå.

Kompendiet har två målsättningar. För det första ska kompendiet lägga en tillräcklig grund för den som behöver grundläggande kunskaper i mätningsteknik i sin (framtida) yrkesutövning. Det kan t.ex. vara förrättnings-lantmätare, projektledare för infrastrukturbyggnationer, GIS-samordnare och samhällsplanerare. För det andra ska kompendiet lägga en bra grund inom mätningsteknik, referenssystem och osäkerhetsteori och ge inspiration till fortsatta studier för den som vill bli specialist inom området.

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021.

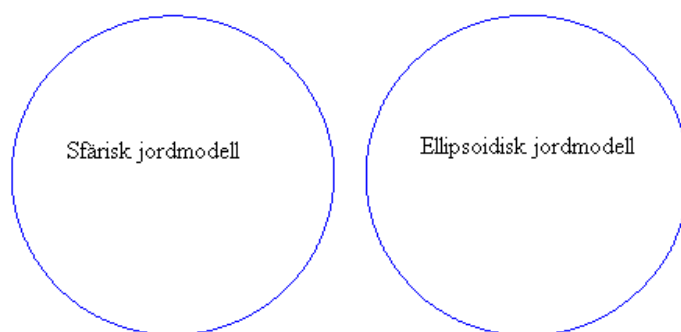
Lästips: En första version av Handbok till Mätningkungörelsen (HMK) togs fram i mitten av 90-talet som en serie av nio böcker. Flertalet av dessa böcker behandlade mätningsteknik. Den ursprungliga HMK-serien har succesivt förnyats och utvecklats,

och idag (2021) finns det fjorton tekniskspecifika handböcker och fyra referensdokument tillgängliga på webben (www.lantmateriet.se/HMK). Där finns även tillgång till äldre HMK-material. Eftersom Mätningsskuggörelsen avvecklades den 1 juli 2010 ändras samtidigt uttydningen av HMK till ”Handbok i mät- och kartfrågor”.

Svenska böcker om geografisk informationsbehandling är t.ex. Harrie (2020) och Hall m.fl. (2003), vilka framförallt kan rekommenderas för den som vill läsa om mätningsteknik i ett GIS-perspektiv. Om man vill läsa mer om detaljer rörande mätningsteknik m.m., är det bättre att studera de mer detaljerade lästipsen i respektive kapitel.

2 Jordmodeller

För att utföra geodetiska och fotogrammetriska mätningar behövs ett koordinatsystem som unikt bestämmer varje punkts läge. Eftersom jordens yta är en mycket oregelbunden yta, är det olämplig att använda den som grund för att skapa ett koordinatsystem. Lösningen här är att använda sig av en *jordmodell*, dvs. en förenklad matematisk modell som hyfsat approximerar jordens storlek och form, som grund för koordinatsystemet. En enkel jordmodell är sfären, dvs. jorden approximeras som en sfär med en radie på ca 6 370 km. Vid närmare påseende visar det sig emellertid att jorden är lite avplattad vid polerna. Denna avplattning beror på att jorden, som inte är en helt stel kropp, är utsatt för krafter på grund av sin egen rotation. Avplattningen medför att sfären inte är lämplig som jordmodell för de flesta mätningstekniska tillämpningar. Den jordmodell som idag används för alla geodetiska och fotogrammetriska tillämpningar är istället *jordellipsoiden*, vilken är huvudtemat för detta kapitel. Rent geometriskt innebär avplattningen att avståndet från jordens mitt till polerna är ca 21 km kortare än avståndet till ekvatorn (Figur 2.1).

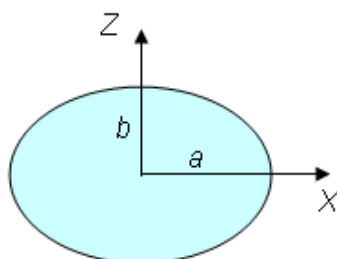


Figur 2.1. Till vänster visas en sfärisk jordmodell (med radien 6370 km) och till höger en ellipsoidisk jordmodell (GRS 80, se Tabell 2.1). Skillnaderna är inte synliga i denna skala; i vanliga fall brukar dock avplattningen kraftigt överdrivas i figurer, se t.ex. Figur 2.2.

2.1 Jordellipsoider

En ellips beskrivs med hjälp av de två axlarna a och b enligt (se Figur 2.2):

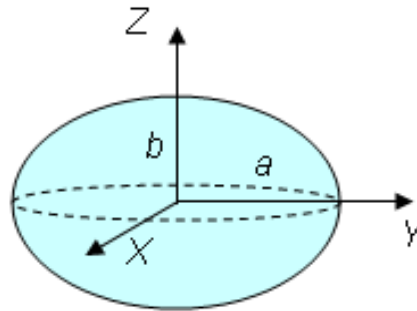
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad 2.1$$



Figur 2.2. En ellips, med koordinatsystem XZ är centrerat till origo på ellipsen.

Om man låter ellipsen i Figur 2.2 rotera kring sin Z -axel uppstår en rotationsellipsoid som beskrivs med formeln (se Figur 2.3):

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad 2.2$$



Figur 2.3. En rotationsellipsoid med axlarna a och b . X , Y och Z utgör ett geocentriskt kartesiskt koordinatsystem med origo i rotationsellipsoidens mittpunkt.

Rotationsellipsoiden (Figur 2.3) används för att definiera jordellipsoiden. För jordellipsoiden benämns a halva storaxeln och b halva lillaxeln. Värdena på de båda halvaxlarna a och b bestämmer helt storleken och formen på jordellipsoiden. Ofta används halva storaxeln och en formstorhet som kallas *avplattningen* för att beskriva jordellipsoidens storlek. Avplattningen f är definierad som:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad 2.3$$

Ända sedan 1700-talet har man gjort mätningar för att bestämma den jordellipsoid som så bra som möjligt anpassar sig till jordens storlek och form, dvs. man har försökt bestämma parametrarna för halv storaxeln (a) och avplattningen (f). Fram till mitten av 1900-talet baserade sig dessa bestämningar på terrestra mätningar, dvs. mätningar gjorda på jordytan. Under de senaste decennierna har allt bättre satellitmetoder använts för ändamålet. Framförallt kan man genom att använda information från specialdesignade satelliter som rör sig på låg höjd få en bra uppfattning om jordens storlek och form (jfr avsnitt 4.5). Det gör att man idag känner till jordens storlek och form på bättre än decimeternivå.

I Tabell 2.1 listas halva storaxeln och avplattningens inverterade värde för några vanliga jordellipsoider. I Sverige användes fram till för några år sedan framförallt Bessel 1841. När vi moderniserade våra koordinatsystem under de senaste åren övergick vi till att använda den numera internationellt rekommenderade jordellipsoiden GRS 80 (detta kommer vi att beskriva mer i detalj i kapitel 4). De övriga ellipsoiderna i tabellen används för satellitpositionering, dvs. GNSS-teknik (se kapitel 10). Det amerikanska satellitsystemet GPS är baserat på ellipsoiden WGS 84, som bara skiljer sig obetydligt från GRS 80 (mindre än en millimeter). Jordellipsoiden PZ-90 används i det ryska satellitsystemet GLONASS.

Tabell 2.1. Storleken på några vanliga jordellipsoider.

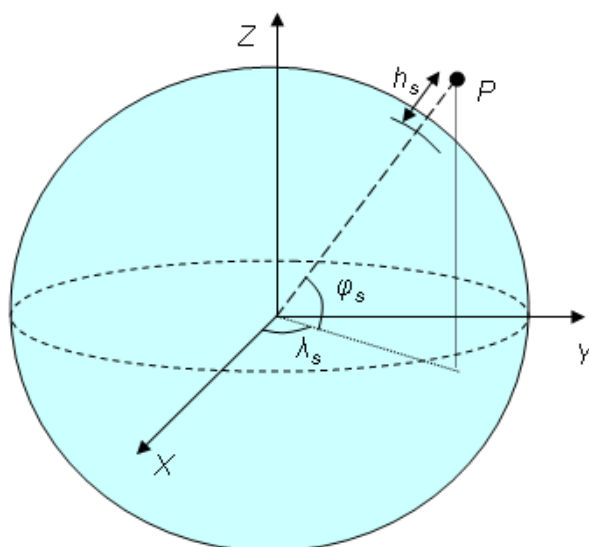
Ellipsoid	Halva storaxeln (meter)	1/avplattning (dim. lös)
Bessel 1841	6 377 397,155	299,1528128
PZ-90	6 378 136,000	298,257839303
GRS 80	6 378 137,000	298,257222101
WGS 84	6 378 137,000	298,257223563

2.2 Koordinatsystem

I detta avsnitt beskriver vi olika sätt att ange en punkts position eller läge på jorden. I avsnitt 2.2.1 gör vi det med en sfär som jordmodell, medan vi i avsnitt 2.2.2 använder en jordellipsoid. Anledning till att sfären introduceras här är främst för att det är pedagogiskt. När man förstått hur den sfäriska jordmodellen fungerar, är det lättare att förstå den ellipsoidiska modellen, vilket är den som nästan alltid används i praktiken.

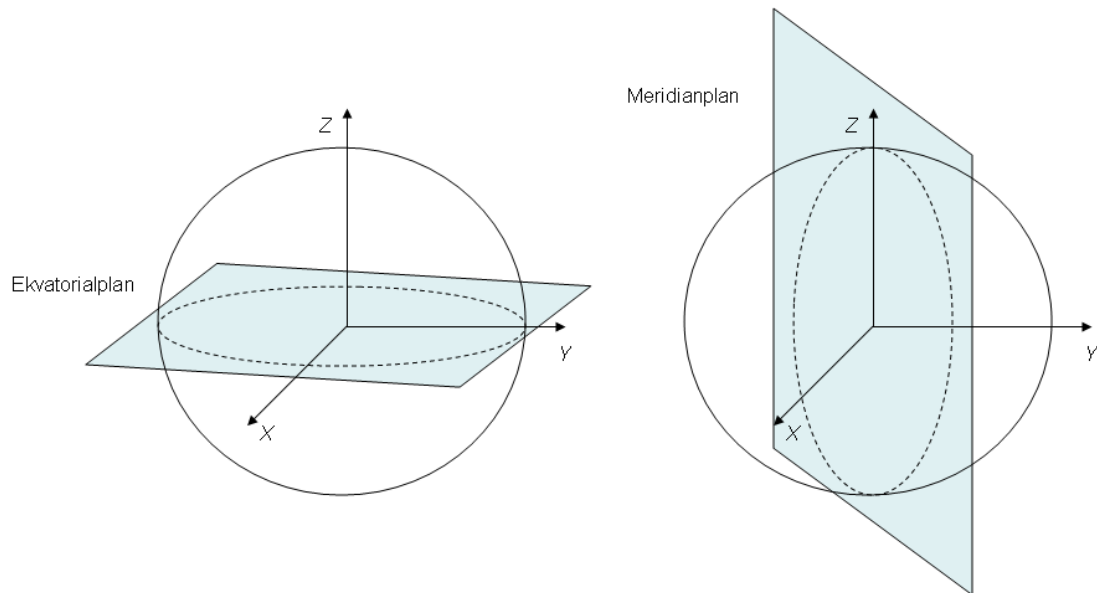
2.2.1 Koordinatsystem på en sfärisk jordmodell

Ett vanligt sätt att ange en punkts läge på en sfär är med hjälp av *sfäriska koordinater*, dvs. med *sfärisk latitud* (φ_s) och *sfärisk longitud* (λ_s) (Figur 2.4). Den sfäriska latituden anger läget i nord-sydlig riktning och definieras som vinkeln mellan ekvatorialplanet (se Figur 2.5) och normalen till sfären för punkten (benämnd P i Figur 2.4). Detta innebär att den sfäriska latituden, på norra halvklotet, varierar från 0 grader vid ekvatorn till 90 grader vid nordpolen.



Figur 2.4. Definition av sfäriskt koordinatsystem.

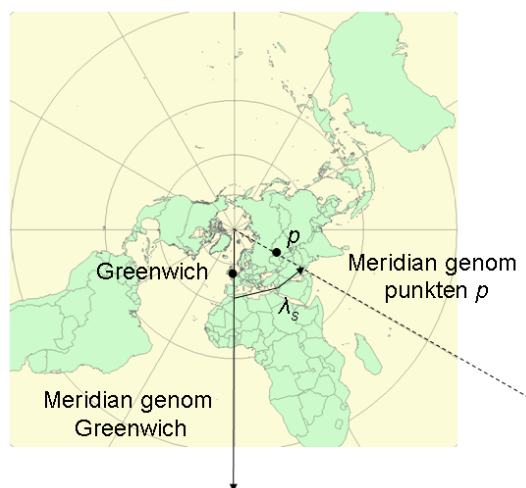
Den sfäriska longituden (λ_s) är vinkeln mellan meridianplanet (se Figur 2.5) genom P och en centralmeridian som alla longitudbestämningar refererar till (se Figur 2.4 och 2.6). Under historiens lopp har skiftande centralmeridianer använts i olika länder. Sedan mer än hundra år tillbaka har dock i princip alla länder övergått till att använda meridianen genom *Greenwich* (ett observatorium utanför London) för att definiera longitud. Det är samma meridian som har en central roll för att definiera tidszoner (jfr t.ex. *Greenwich mean time*). Detta beror på att vår tidräkning är baserad på jordens rotation och på så sätt är tidmätning och mätning av longitud intimt förknippade med varandra.



Figur 2.5. Ekvatorialplanet (vänster) definieras som det plan som innehåller ekvatorn. Ekvatorialplanet innehåller således både X- och Y-axeln. Meridianplanet (höger) är ett plan som innehåller jordmodellens rotationsaxel (dvs. Z-axeln). Meridianplanen skär jordmodellen i meridianerna (streckade linjen, se också Figur 2.10).

Med sfärisk latitud och sfärisk longitud kan man bestämma en position på en sfär. I många sammanhang önskar man dock ange läget på en punkt ovanför, eller under, jordmodellen. På en sfär kan detta göras genom att ange höjden över sfären (benämnd h_s i Figur 2.4). Totalt sett har vi alltså tre koordinater (φ_s , λ_s och h_s) som definierar ett godtyckligt läge i förhållande till sfären.

Sfärisk latitud och sfärisk longitud anges vanligen i *grader*, *minuter* och *sekunder*. En grad är 1/360-dels varv, en minut är 1/60-dels grad och en sekund 1/60-dels minut. Om man vill specificera longituden för Stockholms gamla observatorium skriver man: $18^\circ 3' 29'',8$, vilket betyder att longituden är 18 grader, 3 minuter och 29,8 sekunder). Detta är lika med 18,058278 grader.



Figur 2.6. Definition av sfärisk longitud.

Kapitel 2: Jordmodeller

Ett annat sätt att ange läget för en punkt på sfären är att använda ett tredimensionellt rätvinkligt koordinatsystem med origo i sfärens mittpunkt. Detta benämns det *geocentriska kartesiska koordinatsystemet* (se Figur 2.4). Z -axeln sammanfaller med jordmodellens rotationsaxel, X -axeln sammanfaller med linjen som skapas av snittet mellan ekvatorialplanet och centralmeridianplanet genom Greenwich, och Y -axeln orienteras så att man erhåller ett högerorienterat system.

I vissa tillämpningar är det nödvändigt att transformera koordinater mellan ett sfäriskt koordinatsystem och motsvarande geocentriska kartesiska koordinatsystem. För att räkna om från sfäriska koordinater till geocentriska kartesiska koordinater används följande samband:

$$\begin{aligned}X &= (R + h_s) \cos \varphi_s \cos \lambda_s \\Y &= (R + h_s) \cos \varphi_s \sin \lambda_s \\Z &= (R + h_s) \sin \varphi_s\end{aligned}\tag{2.4}$$

där R är en medeljordradie som används för att bestämma den sfäriska jordmodellens storlek. Formlerna för att beräkna i motsatt riktning är:

$$\begin{aligned}\tan \lambda_s &= \frac{Y}{X} \\ \tan \varphi_s &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ h_s &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} - R\end{aligned}\tag{2.5}$$

Exempel 2.1: Beräkna de sfäriska koordinaterna för Trekröset. Använd radien $R = 6\,370\,000$ m för den sfäriska jordmodellen.

Trekröset har följande geocentriska kartesiska koordinater (SWEREF 99):

$$X = 2\,140\,890 \text{ m}$$

$$Y = 802\,517 \text{ m}$$

$$Z = 5\,934\,862 \text{ m}$$

Lösning: Omräkning av de geocentriska kartesiska koordinaterna till sfäriska koordinater kan göras med formel 2.5.

$$\lambda_s = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \approx 0,35864095 \text{ radianer} \approx 20^\circ,548613 \approx 20^\circ 32' 55,0''$$

$$\varphi_s = \arctan\left(\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right) \approx 1,20307642 \text{ radianer} \approx 68^\circ,931201 \approx 68^\circ 55' 52,3''$$

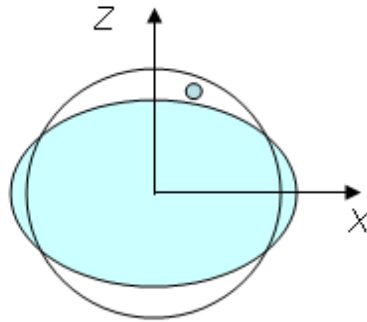
$$h_s = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} - R \approx -9\,966 \text{ m}$$

Koordinatvärdena i exemplet har en osäkerhet på någon meter och därför bör svaret ha en jämförbar precision. För latituden motsvarar en grad ca 111 km på jordmodellen och därav fås att en sekund ($1/3600$ grad) är ca 30 m. I Sverige motsvarar en grad för longituden ungefär hälften så mycket, dvs. 15 m. Detta beror på att meridianerna närmar sig varandra (konvergerar) när man rör sig från ekvatorn mot polerna (jfr Figur 2.6 och 2.10). Det är därför rimligt att svara med en decimal för sekundvärdet.

Svar: De sfäriska koordinaterna för Tretriksörset är:

$$\lambda_s = 20^{\circ}32'55,0'' \text{ , } \varphi_s = 68^{\circ}55'52,3'' \text{ och } h_s = -9\ 966 \text{ m.}$$

Kommentar till svaret: Observera att koordinaterna för Tretriksörset endast är skattade och som sagt har någon meters osäkerhet. Den jordradie som använts (6 370 km) är en ungefärlig medelradie för hela jorden. Jordens avplattning gör då att höjderna blir negativa när man närmar sig polerna (Figur 2.7). De geocentriska kartesiska koordinaterna är idag vanligtvis givna i ett globalt anpassat koordinatsystem (referenssystem), t.ex. SWEREF 99; detta kommer beskrivas närmare i kapitel 4.



Figur 2.7. Den ljusblå punkten befinner sig ovanför jordellipsoiden men samtidigt under ytan på den sfäriska jordmodellen. Punkten kommer därför att ha en positiv höjd över jordellipsoiden (h) och en negativ höjd relativt sfären (h_s).

2.2.2 Koordinatsystem på en jordellipsoid

För att ange koordinater på en ellipsoid används de geografiska koordinaterna *latitud* (φ), *longitud* (λ) och *höjd över ellipsoiden* (h) (Figur 2.8). Dessa koordinater benämns även *geodetiska koordinater*. Latitud definieras som vinkeln mellan ekvatorialplanet och normalen till ellipsoidytan för punkten P . En bra frågeställning är varför man valt att definiera latitud med normalen till ellipsoidytan och inte riktningen mot jordens mittpunkt. Anledningen är främst att man vill ha en definition av latitud för en linje som ligger nära lodlinjen och lodlinjen sammanfaller i stort sett med ellipsoidytans normal (lodlinjen på jordytan pekar således inte mot jordens mitt). Longitud definieras på samma sätt som för det sfäriska koordinatsystemet (jfr Figur 2.6 och Figur 2.8), dvs. som vinkeln mellan meridianplanet som går genom punkten (t.ex. punkten P i Figur 2.6 och Figur 2.8) och meridianplanet genom Greenwich.

Vid många tillämpningar används ett geocentriskt kartesiskt koordinatsystem (X , Y och Z) där origo är placerat i jordellipsoidens mittpunkt. Om man känner till en punkts geografiska koordinater och vill beräkna de kartesiska, används följande samband:

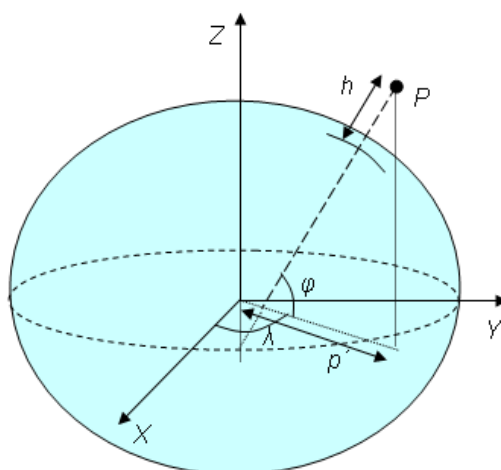
$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{aligned} \quad 2.6$$

där N är *tvärkrökningsradien* (Figur 2.9) och e är den *första excentriciteten*. Dessa båda parametrar bestäms av ellipsoidens storlek och form och definieras enligt:

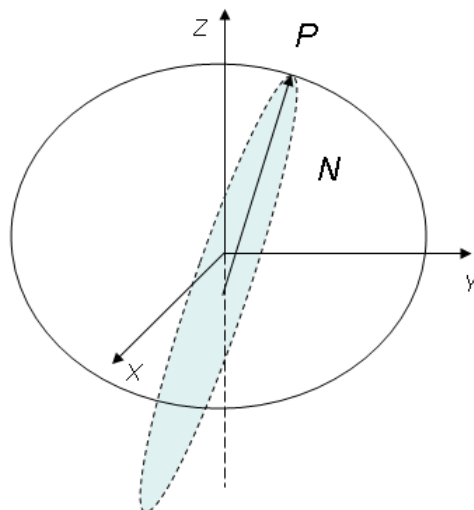
$$e^2 = 2f - f^2$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 (\sin \varphi)^2}} \quad 2.7$$

där a är halva storaxeln (jfr formel 2.2). Som synes är tvärkrökningsradien N en funktion av latituden. Den beskriver ellipsoidens krökningsförhållande tvärs (vinkelrätt mot) meridianerna (Figur 2.9). För ekvatorn är tvärkrökningsradien lika med halva storaxeln för att sedan öka något mot bägge polerna.



Figur 2.8. Definition av geografiskt (geodetiskt) koordinatsystem. Den streckade linjen till P är normalen till ellipsoidens yta.



Figur 2.9. Definition av tvärkrökningsradie. En cirkel (streckad linje) som har samma krökningsförhållande som ellipsoiden tvärs meridianen (i en punkt P) är placerad så att den ansluter mot ellipsoiden i punkten P . Cirkelns radie (pilen) är lika med tvärkrökningsradien N .

Det inversa sambandet mellan geocentriska kartesiska koordinater och geografiska koordinater ges av följande formelsamband:

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X}$$

$$\tan \varphi = \frac{Z + \left(\frac{ae^2}{\sqrt{1-e^2}} \right) (\sin \theta)^3}{p' - ae^2 (\cos \theta)^3} \quad 2.8$$

$$h = \frac{p'}{\cos \varphi} - N$$

där

$$p' = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\tan \theta = \frac{Z}{p' \sqrt{1-e^2}}, \text{ och}$$

tvärkrökningsradien N ges av formel 2.7. Storheten p' är längden av den på horisontalplanet projicerade vektorn till P i Figur 2.8.

Exempel 2.2: Beräkna de geografiska koordinaterna för Treriksröset. De geografiska koordinaterna ska vara definierade på ellipsoiden GRS 80, som har halva storaxeln $a = 6\,378\,137,0$ m och avplattningen $f = 1/298,257222101$ (dimensionslös).

Treriksröset har följande geocentriska kartesiska koordinater (SWEREF 99):

$$X = 2\,140\,890 \text{ m}$$

$$Y = 802\,517 \text{ m}$$

$$Z = 5\,934\,862 \text{ m}$$

Lösning: Omräkning av de geocentriska kartesiska koordinaterna till geografiska koordinater görs enligt följande.

- a) Beräkna först longituden λ (formel 2.8)

$$\lambda = \arctan \left(\frac{Y}{X} \right) \approx 0,35864095 \text{ radianer} \approx 20,548613^\circ \approx 20^\circ 32' 55,0''$$

- b) Därefter beräknas latituden φ (formel 2.8). Starta med att beräkna p' , θ och e^2 (formel 2.7 och 2.8)

$$p' = \sqrt{X^2 + Y^2} \approx 2\,286\,360,32 \text{ m}$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{Z}{p' \sqrt{1-e^2}} \right) \approx 1,204201626 \text{ radianer}$$

$$e^2 = 2f - f^2 = 0,00669438002290$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{Z + \left(\frac{ae^2}{\sqrt{1-e^2}} \right) (\sin \theta)^3}{p' - ae^2 (\cos \theta)^3} \right) \approx 1,20532385 \text{ radianer} \approx 69,0599696^\circ \approx 69^\circ 3' 35,9''$$

- c) Slutligen beräknas höjden över ellipsoiden (h) med hjälp av formlerna 2.7 och 2.8:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 (\sin \varphi)^2}} \approx 6\,396\,840,95 \text{ m}$$

$$h = \frac{p'}{\cos \varphi} - N \approx 530 \text{ m}$$

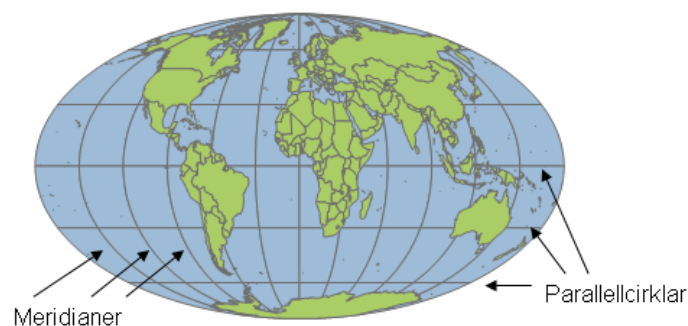
Svaret önskas med meterprecision, vilket ungefärligen motsvarar en decimal för sekunden (jfr exempel 2.1).

Svar: De geografiska koordinaterna (i förhållande till GRS 80-ellipsoiden) för Treriksröset är:

$$\lambda = 20^\circ 32' 55,0'', \varphi = 69^\circ 3' 35,9'', \text{ och } h = 530 \text{ m.}$$

2.2.3 Gradnät

Två ofta förekommande begrepp vid sfäriska och ellipsoidiska jordmodeller är *meridian* och *parallellcirkel*. I Figur 2.10 ser man att longituden är konstant längs en meridian och att latituden är konstant längs en parallellcirkel. Ekvatorn är den parallellcirkel som delar in jorden i norra och södra halvklotet. Tillsammans utgör meridianerna och parallellcirkelarna det så kallade *gradnätet*.



Figur 2.10. Exempel på meridianer och parallellcirkel. Källa: Data från ESRI.

2.3 Avståndsberäkning på sfär och jordellipsoid

Det finns flera sätt att definiera avstånd mellan punkter. I detta avsnitt beskrivs avstånd längs den rätta linjen och på jordmodellernas ytor.

Euklidiskt avstånd

Det kortaste avståndet mellan två punkter är alltid längs en rät linje mellan punkterna. Inom geometrin benämns detta Euklidiskt avstånd (d_E). I fallet med punkterna A och B beräknas det Euklidiska avståndet med Pythagoras sats enligt:

$$d_E = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2} \quad 2.9$$

Sfäriskt avstånd

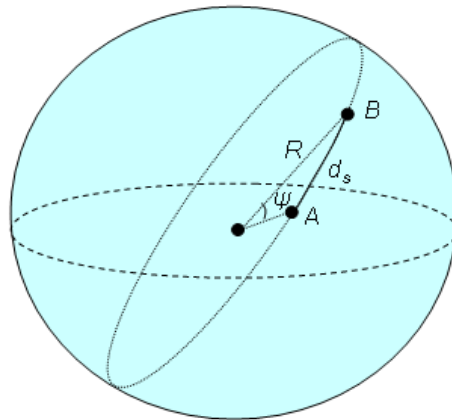
Inom mätningsteknik är vi ofta intresserade av det kortaste avståndet mellan två punkter på jordmodellens yta. Om man använder en sfärisk jordmodell benämns detta *sfäriskt avstånd*. Det kortaste avståndet mellan två punkter på en sfär går alltid längs med storcirkeln som passerar dessa båda punkter. I Figur 2.11 visas storcirkelbågen genom

punkterna a och b med en prickad linje. Det sfäriska avståndet d_s beräknas ur:

$$d_s = R\psi \quad 2.10$$

där R är medeljordradien och ψ är *bågvståndet* (Figur 2.11) uttryckt i radianer. Observera här att bågvstånd är en vinkel (kallas ibland för vinkelavstånd). Som en kontroll av detta uttryck kan man stoppa in bågvståndet för ett helt varv (2π) och då erhålls som väntat det vanliga uttrycket för omkretsen på en cirkel. Bågvståndet (mellan punkt A och B) beräknas ur de sfäriska koordinaterna ur det så kallade sfäriska cosinusteoremet:

$$\cos\psi = \sin\varphi_{s,A} \sin\varphi_{s,B} + \cos\varphi_{s,A} \cos\varphi_{s,B} \cos(\lambda_{s,A} - \lambda_{s,B}) \quad 2.11$$



Figur 2.11. Bågvståndet ψ och sfäriskt avstånd d_s mellan punkterna A och B . Den prickade linjen är storcirkeln genom A och B ; R är medeljordradien.

Avstånd på ellipsoiden

Det kortaste avståndet mellan två punkter på en ellipsoid går längs med *geodetiska linjen*. Den geodetiska linjen är ett generellt begrepp för det kortaste avståndet mellan två punkter på en godtycklig yta (på sfären är till exempel storcirkeln en geodetisk linje). Att beräkna detta avstånd på ellipsoiden är dock svårt. Det finns inga slutna formler, utan istället måste man tillgripa iterativa formler eller långa serieutvecklingar. Den som är intresserad av sådana beräkningar får studera speciallitteratur inom geodesi eller differentialgeometri.

Observera att höjderna för punkterna varken påverkar det sfäriska avståndet eller avståndet på ellipsoiden. För att beräkna dessa avstånd projiceras först punkterna på ytan och därefter beräknas avståndet på själva ytan (sfären respektive ellipsoiden).

Avståndsberäkning på ellipsoiden har en viktig funktion vid terrester mätning (och beräkning) av långa avstånd. Idag används dock nästan uteslutande satellitmätning med GNSS för mätning av längre avstånd. Därför har avståndsberäkningar på ellipsoiden förlorat mycket av sin praktiska betydelse inom den geodetiska mätningstekniken, även fast det förekommer att man behöver beräkna avståndet på ellipsoiden mellan två punkter som mätts in med GNSS.

Beräknar man avståndet från ekvatorn till nordpolen längs en meridian fås omkring 10 000 km. Att man får ett sådant jämnt värde är ingen slump. En meter definierades ursprungligen som en tiomiljontedel av avståndet från ekvatorn till nordpolen. Idag definieras emellertid en meter genom hur långt ljuset går i vakuum under en viss tidsperiod.

Kapitel 2: Jordmodeller

Exempel 2.3: Bestäm längden på Sverige genom att beräkna Euklidiskt avstånd, sfäriskt avstånd ($R = 6\,370\,000$ m) och avstånd på GRS 80-ellipsoiden.

Treriksröset har följande geocentriska kartesiska koordinater (i SWEREF 99, se 4.2.2):

$$X_T = 2\,140\,890 \text{ m}$$

$$Y_T = 802\,517 \text{ m}$$

$$Z_T = 5\,934\,862 \text{ m}$$

och södra udden vid Smygehuk har följande geocentriska kartesiska koordinater (SWEREF 99):

$$X_S = 3\,537\,434 \text{ m}$$

$$Y_S = 840\,093 \text{ m}$$

$$Z_S = 5\,222\,849 \text{ m}$$

Lösning: Beräkning av det Euklidiska avståndet görs med formel 2.9:

$$d_E = \sqrt{(X_S - X_T)^2 + (Y_S - Y_T)^2 + (Z_S - Z_T)^2} \approx 1\,568\,027 \text{ m}$$

För att beräkna det sfäriska avståndet utnyttjar vi resultat från Exempel 2.1 för Treriksröset:

$$\lambda_{s,T} = 0,35864095 \text{ radianer}$$

$$\varphi_{s,T} = 1,20307642 \text{ radianer}$$

Motsvarande beräkning för Smygehuk ger:

$$\lambda_{s,S} = 0,23316706 \text{ radianer}$$

$$\varphi_{s,S} = 0,96266733 \text{ radianer}$$

Med hjälp av formel 2.11 beräknas bågavståndet till:

$$\psi = \arccos(\sin \varphi_{s,T} \sin \varphi_{s,S} + \cos \varphi_{s,T} \cos \varphi_{s,S} \cos(\lambda_{s,T} - \lambda_{s,S})) \approx 0,24709928 \text{ radianer}$$

Med hjälp av bågavståndet och formel 2.10 beräknas sedan det sfäriska avståndet:

$$d_s = R\psi = 6\,370\,000 \cdot 0,24709928 \text{ m} = 1\,574\,022 \text{ m}$$

För att beräkna avståndet på ellipsoiden utnyttjar vi resultat från Exempel 2.2 för Treriksröset. Där beräknades de geografiska koordinaterna till:

$$\lambda_T = 20^\circ 32' 55",01$$

$$\varphi_T = 69^\circ 3' 35",89$$

Motsvarande beräkning för Smygehuk ger:

$$\lambda_S = 13^\circ 21' 34",16$$

$$\varphi_S = 55^\circ 20' 13",27$$

Med hjälp av ett komplicerat beräkningsprogram för avstånd på ellipsoiden fås 1 571 922 m (detaljer för hur detta går till beskrivs inte i detta kompendium).

Svar: Följande avstånd fås mellan Smygehuk och Tretriksörset:

Euklidiskt avstånd = 1 568 027 m

Sfäriskt avstånd = 1 574 022 m

Avstånd på ellipsoiden = 1 571 922 m

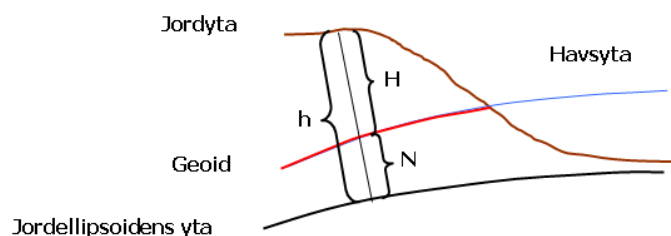
Kommentar till svar: Att det Euklidiska avståndet är kortast är rätt självklart (kordor är kortare än bågar). Att det sfäriska avståndet är längre än avståndet på ellipsoiden beror på att den sfäriska jordmodell som använts här är anpassad till hela jorden, vilket gör att den "ligger ovanför Sverige" och därmed blir avstånden projicerade på denna sfär längre än de som projiceras på ellipsoiden (jfr Figur 2.7).

2.4 Olika typer av höjd

I de föregående avsnitten har vi främst inriktat oss mot hur man anger den horisontella positionen på jordens yta. I detta avsnitt går vi vidare med att behandla höjd. En grundförutsättning för att ange höjd är att man har ett höjdsystem att utgå ifrån. Eftersom det finns flera olika typer höjder, måste man vara noga med att ange vilken typ av höjd som avses. Vi kommer att beskriva höjdsystem mer ingående i avsnitt 4.4, men innan dess måste vi förklara de olika höjdtyperna och introducera de fundamentalytor som behövs för att definiera dem.

2.4.1 Jordens fundamentalytor

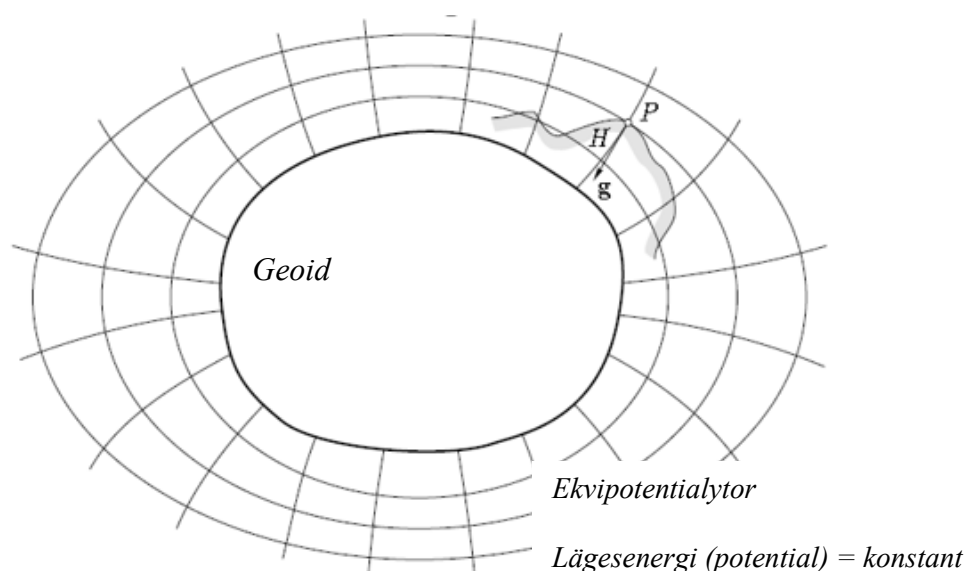
Inom geodesin används tre fundamentalytor för att beskriva jorden: *jordytan*, *geoiden* och *jordellipsoidens yta* (Figur 2.12. Fundamentalytor på jorden: jordytan, geoiden och jordellipsoiden. H är jordytans höjd över geoiden, h är jordytans höjd över jordellipsoiden och N är geoidens höjd över jordellipsoiden (den s.k. geoidhöjden). Källa: Lantmäteriet.). Jordytan är den fysiska yta som vi går på. Denna yta är relativt ojämn, särskilt i bergsområden. Den skiljer sig som mest från de två övriga ytorna med omkring $\pm 10\,000$ meter (vid de högsta bergstopparna och djupaste havsgravarna).



Figur 2.12. Fundamentalytor på jorden: jordytan, geoiden och jordellipsoiden. H är jordytans höjd över geoiden, h är jordytans höjd över jordellipsoiden och N är geoidens höjd över jordellipsoiden (den s.k. geoidhöjden). Källa: Lantmäteriet.

Geoiden är en fysikalisk yta. Man kan, något förenklat, se geoiden som havsytan och dess tänkta förlängning in under land. I mer strikt mening definieras geoiden som den *ekvipotentialyta i jordens tyngdkraftsfält* som bäst sammanfaller med medelnivån för havsytan (Figur 2.13). Med tyngdkraftsfältet menar vi här det fält som beskriver tyngdkraften. Tyngdkraften varierar på jordytan (beror på att jorden inte är en homogen kropp) och avtar dessutom med stigande höjd (som en följd av Newtons gravitationslag). Tyngdkraftsfältet är därför ett relativt oregelbundet fält. Varje punkt i tyngdkraftsfältet har en lägesenerginivå; denna lägesenergi kan ses som den mängd

energi som krävs för att förflytta en vikt från jordens mittpunkt till denna punkt. Alla punkter i tyngdkraftsfältet som har samma lägesenergi binds samman till en ekvipotentialyta (Figur 2.13). För en ekvipotentialyta i tyngdkraftsfältet gäller således att lägesenergin är konstant (dock gäller inte att tyngdkraften är konstant, vilket är ett vanligt missförstånd). Att havsytan är en del av en ekvipotentialyta beror på att lägesenergin måste vara densamma överallt på havsytan; om så inte vore fallet skulle vattnet rinna mot de lägre områdena tills vattenytan sammanfaller med en ekvipotentialyta. Geoiden har ytterligare en intressant egenskap: den är alltid vinkelrät mot lodlinjen. Detta är en följd av att lägesenergin alltid ändras snabbast om man följer lodlinjen (vilket är det som vi i normalt fall anser vara rakt nedåt, se Figur 2.13). Slutligen, eftersom geoiden är en ekvipotentialyta är den relativt jämn i formen; den varierar inte alls så kraftigt som jordytan gör.



Figur 2.13. De horisontella linjerna är exempel på ekvipotentialytor i jordens tyngdkraftsfält. En av dessa ekvipotentialytor sammanfaller med havsytans medelnivå (fet linje); denna ekvipotentialyta benämns geoiden. Lodlinjerna skär vinkelrät mot alla ekvipotentialytor (inklusive geoiden). Tyngdkraftsvektorn g tangerar lodlinjen i varje punkt. Källa: Heiskanen och Moritz (1967), *Physical Geodesy*.

Den tredje och sista fundamentalytan är jordellipsoidens yta. I kapitel 2 beskrev vi att jordellipsoiden är en rent matematisk yta som används för att approximera jorden.

Inom mätillämpningar är vi främst intresserade av hur jordytan varierar i förhållande till de övriga två fundamentalytorna. Detta ger upphov till två skilda typer av höjd: *höjd över geoiden* (H i Figur 2.12) respektive *höjd över jordellipsoiden* (h i Figur 2.12).

2.4.2 Höjd över geoiden

I dagligt tal sägs t.ex. att Kebnekaises topp är 2 111 meter över havet, men vad vi egentligen menar är här att toppen är 2 111 meter över geoiden. Det finns tre skäl till att vi använder geoiden som referensyta för höjd.

1) Höjden blir noll vid havsytan

Definitionen av geoiden är att den är den nivåyta som sammanfaller med havsytans medelnivå. Detta gör att havsytan får höjden noll, vilket är naturligt eftersom höjd främst används för att ange jordytans variation.

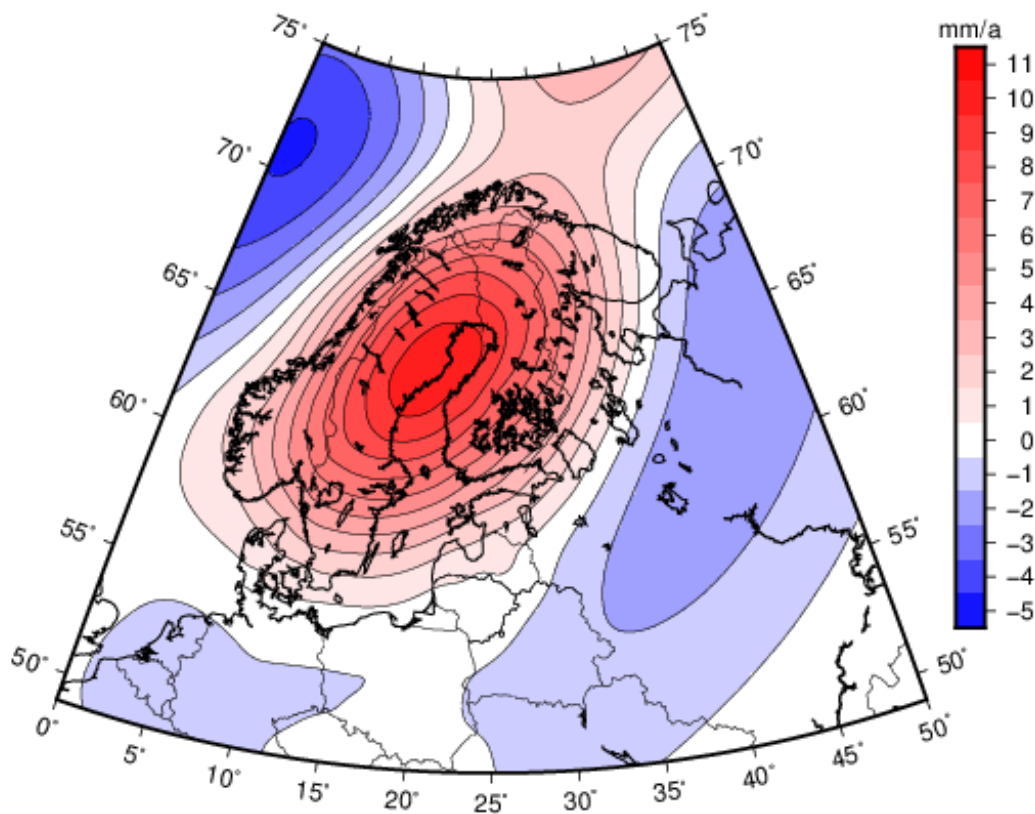
2) Vatten rinner alltid mot lägre höjd

En viktig tillämpning av höjdmätning är för byggande av hus, vägar, VA-anläggningar och liknande. Det är då enklast att använda den typ av höjd som resulterar i att vatten alltid kommer att rinna mot lägre höjd; annars är det mycket svårt att t.ex. anlägga ett nytt avloppsrör.

3) Avvägning ger höjder över geoiden

Den metod som främst används för noggrann höjdmätning är *avvägning* (se avsnitt 5.4 och 6.3). I avvägning horisonterar man avvägningsinstrumentet så att dess vertikalexel sammanfaller med lodlinjen och därmed mäts höjden (egentligen höjdskillnaden) relativt geoiden (eftersom geoiden är vinkelrät mot lodlinjen, se Figur 2.13).

I verkligheten är det en mycket komplicerad process att bestämma höjd. För det första varierar havsnivåerna rumsligt (p.g.a. exempelvis havsströmmar och varierande salthalt) och i tiden (p.g.a. exempelvis tidvatten och avsmältning av ismassor). För det andra förändras (deformeras) själva jordytan. Inom Sverige beror jordytans förändring främst på *landhöjningen* efter den senaste istiden; denna höjning av landet är störst längs norrlandskusten (ca 1 cm per år) medan den är mindre i den södra delen av landet. Detta illustreras i Figur 2.14 som visar en landhöjningsmodell i förhållande till jordens masscentrum. Vidare är det så att havsytan stiger med någon till några millimeter om året längs den svenska kusten (delvis beroende på klimatförändringarna), vilket gör att man i södra Sverige upplever en landsänkning relativt havsytans medelnivå. Relativt jordens masscentrum höjer sig dock hela Sverige (jfr landhöjningsmodellen i Figur 2.14).



Figur 2.14. Landhöjningen ur den nordiska modellen NKG2016LU_abs, som anger landhöjningen i förhållande till jordens masscentrum (ITRF 2008). Isolinjerna har en ekvidistans på 1 mm/år. Källa: Vestøl m.fl. (2019).

Kapitel 2: Jordmodeller

Inom geodesin benämner vi höjd över geoiden för *ortometriska höjd*. I praktiken används dock inte alltid ortometriska höjder i strikt mening (se avsnitt 4.4), utan istället används *normalhöjd* som är höjden över *kvasigeoiden*. Skillnaden mellan geoiden och kvasigeoiden är relativt liten (på cm-nivå utanför fjällområdena) och distinktionen mellan dem ligger utanför ambitionsnivån i detta kompendium; det finns inget sätt att förklara den utan att gå djupt in i den fysikaliska geodesin. Vi kommer därför inte göra någon skillnad mellan ortometriska höjd och normalhöjd senare i kompendiet, utan pratar oftast om höjd över geoiden.

2.4.3 Höjd över ellipsoiden

I vissa sammanhang mäts höjder relativt ellipsoidens yta (h i Figur 2.12). Denna typ av höjd används främst vid satellitmätning. Anledningen är att GPS och andra GNSS-tekniker (kapitel 10 och 11) mäter höjder relativt ellipsoiden och inte höjder relativt geoiden.

Man bör observera att ellipsoidytan inte helt sammanfaller med någon ekvipotentialyta, vilket gör att lodlinjen inte är vinkelrät mot ellipsoidytan. Detta ger i sin tur att vatten inte alltid rinner åt lägre höjdvärden (relativt ellipsoiden), vilket i sin tur gör att det inte är så lämpligt att använda höjder över ellipsoiden för praktiska mätningar. Vidare är inte höjder över ellipsoiden lika med noll vid havsytan. Detta orsakar att en seglare kan få en höjd på tiotalet meter med sin GNSS-mottagare under en segeltur.

2.4.4 Geoidhöjd

Skillnaden mellan geoiden och jordellipsoiden benämns *geoidhöjden*. Geoidhöjden varierar över jorden och uppgår till ungefär ± 100 meter. Anledning till det är att jorden är en icke-homogen kropp med varierande densitet, och således kommer tyngdkraften att variera från plats till plats, vilket även påverkar nivåerna för lägesenergin och därmed geoiden.

Med kunskap om geoidhöjden kan man konvertera mellan *höjd över ellipsoiden* (mätt t.ex. med en GNSS-mottagare) och *höjd över geoiden*. Enligt Figur 2.12 görs denna konvertering enligt:

$$H = h - N \quad 2.12$$

där N är geoidhöjden. Detta innebär att den höjd som presenteras i GNSS-mottagaren mycket väl kan vara höjden över geoiden, även om mottagaren primärt har mätt höjden över ellipsoiden. Denna konvertering kräver dock att geoidhöjderna är bestämda för det område där mätningarna utförts och att denna information finns inlagd i GNSS-mottagaren i form av en geoidmodell.

-----*****-----

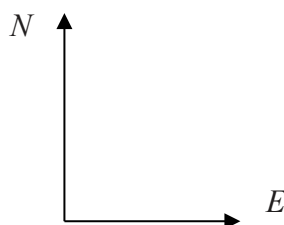
Status: Kapitlet reviderades 2021.

Tack till Lars Sjöberg, Stockholm, och Martin Ekman, Gävle. Era kompendier och böcker har varit viktiga idégivare till detta kapitel. /Lars Harrie och Jonas Ågren

Lästips: Två kompendier som ingående behandlar jordmodeller är Ekman (1991) och Sjöberg (2008). Ekman (2002) har en detaljerad och bra beskrivning på svenska om jordmodeller. För den som vill läsa mer om höjdsystem på svenska rekommenderas Ekman (2002).

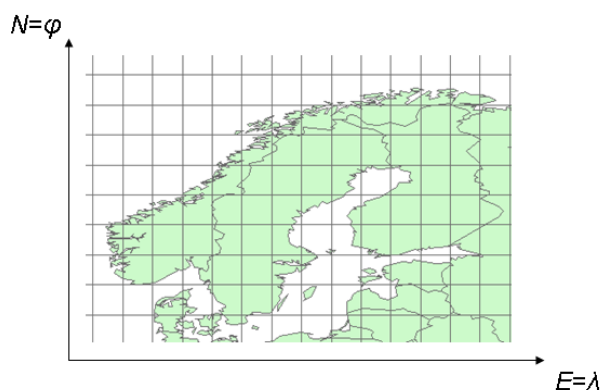
3 Kartprojektioner

I föregående kapitel beskrevs hur man kan ange en position på jordellipsoiden med hjälp av geografiska koordinater (latitud och longitud). Detta kapitel behandlar hur denna position kan överföras till ett plant papper eller en datorskärm. Målet är att avbilda den buktiga ytan på ellipsoiden på ett plan. Vidare behövs ett standardiserat sätt att uttrycka positionen i det plana koordinatsystemet. En vanlig konvention är att benämna axlarna i detta koordinatsystem i enlighet med Figur 3.1, där N står för *Northing* och E för *Easting*.



Figur 3.1. Ett plant koordinatsystem i kartplanet.

En enkel ansats vore att skapa ett tvådimensionellt koordinatsystem med longitud på E -axeln och latitud på N -axeln; detta benämns ibland *kvadratisk plattkarta* eller *Plate Carrée-projektion*. Problemet med denna ansats är att den starkt kommer att förvränga verkligheten. Detta syns tydligt i Figur 3.2 där vi avbildat Norden på detta sätt. Som vi kan se är Sverige och övriga länder betydligt bredare (i öst-västlig riktning) än de egentligen är. Anledningen till skalproblemet i öst-västlig riktning är att meridianerna konvergerar (dvs. närmar sig varandra) vid nord- och sydpolerna (jfr Figur 2.6 och Figur 2.10). Dock är avstånden mellan meridianerna konstant i plattkartan (Figur 3.2) vilket gör att kartan är kraftigt uttänjd i öst-västlig riktning.



Figur 3.2. Karta där axlarna utgörs av longitud och latitud. Källa: Data från ESRI.

För att skapa bättre kartor måste vi istället låta E - och N -koordinaterna vara funktioner av latitud och longitud enligt:

$$\begin{aligned} E &= f_E(\varphi, \lambda) \\ N &= f_N(\varphi, \lambda) \end{aligned} \tag{3.1}$$

där

E , N är koordinater i kartplanet,
 f_E , f_N är funktioner som beskriver kartprojektionerna (se exempel i formel 3.9), och
 φ , λ är latitud och longitud.

En sådan avbildning från en position på ellipsoiden (eller sfären) till ett plant system benämns *kartprojektion*. En kartprojektion kan aldrig vara perfekt; det uppstår alltid geometriska distortioner (förvrängningar) när man avbildar en buktig yta på en plan yta. Att bevisa detta strikt kräver avancerad matematik, men det kan enkelt illustreras med en vardagssituation: försök att få ett apelsinskal att ligga platt på ett bord utan att på något sätt deformera skalet.

Det finns flera kartprojektioner framtagna för olika syften. Vilken projektion som är bäst beror på tillämpningen. För att kunna göra ett bra val av kartprojektion krävs grundläggande kunskap om hur projektionerna är konstruerade och vilka egenskaper de har. Detta kapitel inleds med en beskrivning av den principiella uppbyggnaden av kartprojektioner (avsnitt 3.1) för att senare komma in på deras egenskaper och geometriska distortioner (avsnitt 3.2). Därefter beskrivs några vanliga kartprojektioner (avsnitt 3.3). Kapitlet avslutas med en matematisk framställning av kartprojektioner (avsnitt 3.4). Slutligen behandlas kartprojektionskorrigering av geodetiska mätningar (avsnitt 3.5).

För att förenkla framställningen i kapitlet kommer vi endast att behandla hur positioner på en sfär avbildas på ett plan. Att avbilda en ellipsoids yta görs på liknande sätt; man använder samma principiella uppbyggnad och strävar efter samma egenskaper i kartan. Observera att det alltid är en jordmodell (sfär eller ellipsoid) som avbildas med en kartprojektion; det är aldrig själva jorden.

3.1 Principiell uppbyggnad

Benämningen *kartprojektion* antyder att man på något sätt *projicerar* jordmodellen på en tvådimensionell yta (kartplanet). Att jordytan projiceras på kartplanet innebär att man kan dra en rät linje mellan alla korresponderande punkter på jordytan och kartplanet och att alla dessa linjer skär varandra i en och samma punkt, denna punkt benämns projektionscentrum. Ofta brukar man illustrera detta med en lampa som placeras i projektionscentrum. Lampan sänder ut ljus som räta linjer som projicerar alla punkter på jordytan på kartplanet (jfr Figur 3.4).

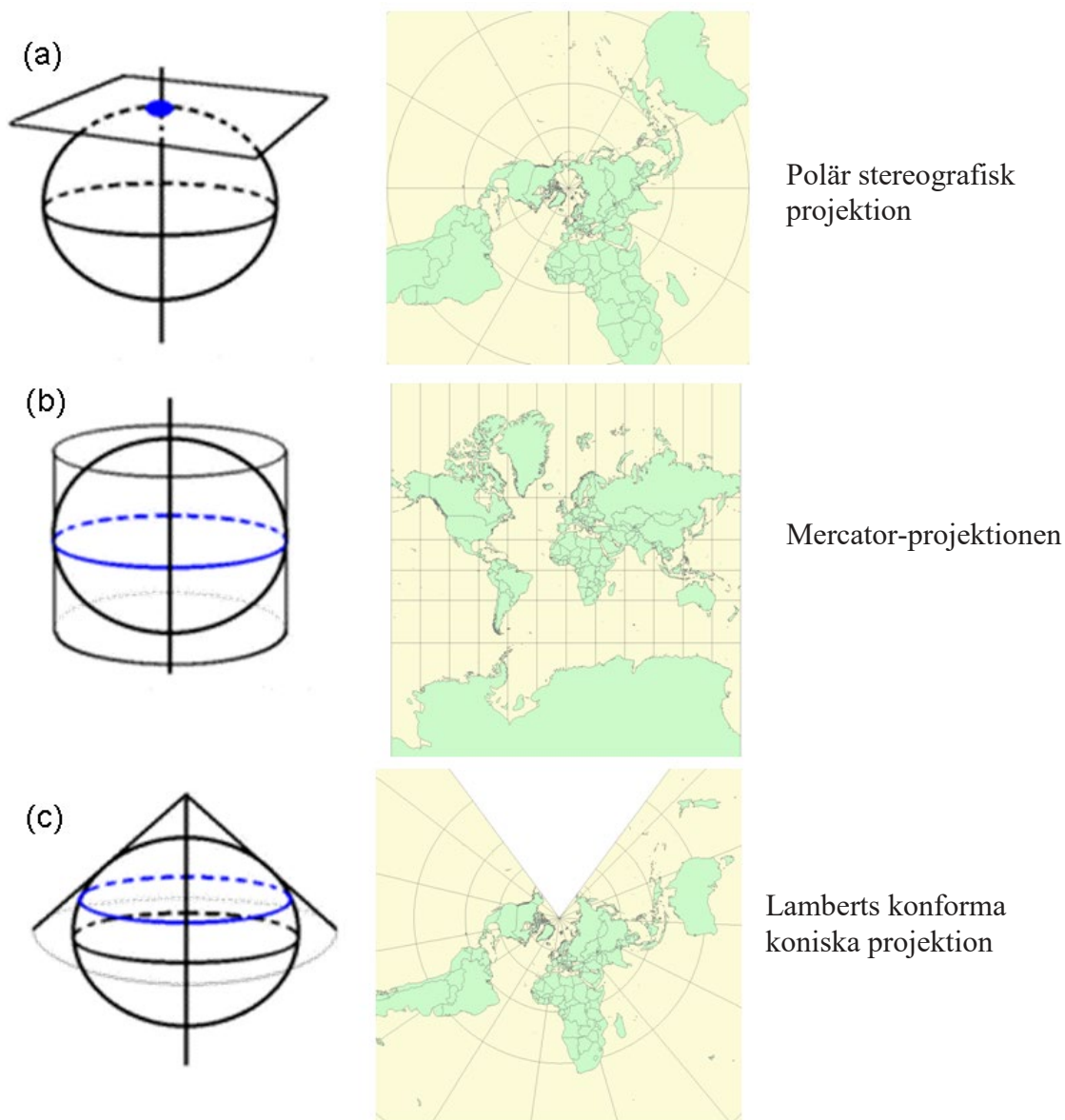
Det finns tre grundläggande typer av projiceringar (Figur 3.3):

Azimutala kartprojektioner: För att skapa en azimutal kartprojektion används ett plan; detta plan läggs på ett sådant sätt att det tangerar jordmodellen i en viss punkt (Figur 3.3a). Därefter definierar man ett projektionscentrum som till exempel jordmodellens mittpunkt. Slutligen projicerar man punkter på jordmodellens yta till planet genom att från projektionscentrum rita räta linjer genom dessa punkter (Figur 3.4). För en azimutal projektion (som tangerar vid någon av polerna) bildar meridianerna räta linjer (radier i en cirkel) och parallellcirkelarna blir koncentriskt cirkel (Figur 3.3a). Deformationerna i kartan är minst närmast tangeringspunkten.

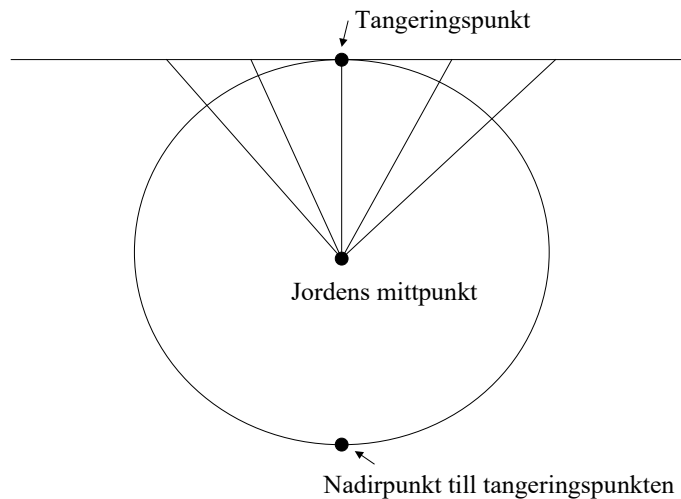
Cylindriska kartprojektioner: Det finns två huvudtyper av cylindriska kartprojektioner. En *normal cylinderprojektion* består av en cylinder vars symmetriaxel sammanfaller med jordmodellens rotationsaxel (cylindern tangerar då ekvatorn). För en *transversal cylinderprojektion* är cylinderns symmetriaxel vinkelrätt mot jordmodellens rotationsaxel. Vid den transversala cylinderprojektion tangerar cylindern en meridian, vilken brukar benämnas *medelmeridian* (se Figur 3.6). I Figur 3.3b visas att vid normal cylinderprojektion bildar meridianerna räta linjer med konstant avstånd från varandra och parallellcirkelarna blir räta linjer vinkelrätt mot meridianerna.

Kapitel 3: Kartprojektioner

Koniska kartprojektioner En kon läggs över jordmodellen. Om konen tangerar en parallellcirkel så bildar meridianerna rätta linjer och parallellcirkelarna delar av koncentriska cirklar (Figur 3.3c). Observera dock att en sektor (liknande en tårtbit) försvinner i avbildningen; denna effekt uppnås när konen klipps upp längs ett snitt så att konens yta kan placeras på ett plan. Den koniska projektionen är inte väl lämpad för att användas vid polerna eller vid ekvatorn, men är användbar i ”mellanhöga” latituder. Projektionens deformationer är minst nära den parallellcirkel där konen tangerar jordmodellen.



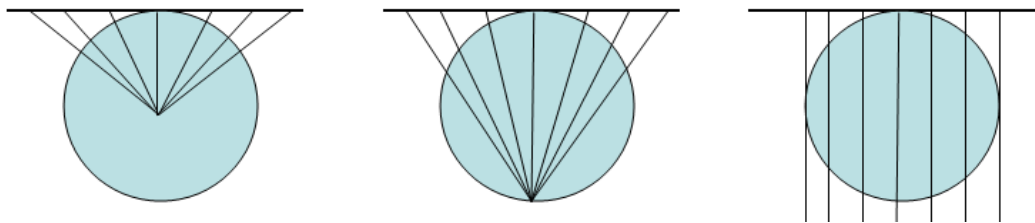
Figur 3.3. Tre sätt att avbilda en jordmodell på ett plan: (a) azimutal, (b) (normal) cylindrisk och (c) (normal) konisk. Till vänster visas hur planet, cylindern respektive konen ligger i förhållande till jordmodellen vid projiceringen och i mitten visas hur jorden avbildas med respektive kartprojektion. Till höger ges namnet på den projektion som använts; andra projektioner av samma typ har liknande utseende vad det gäller avbildningen av gradnätet.



Figur 3.4. Asimutal projektion, där jordens mittpunkt är projektionscentrum (gnomonisk projektion). Nadirpunkten definieras som den punkten som ligger diametralt på andra sidan jordmodellen. Nadirpunkten benämns ibland antipoden

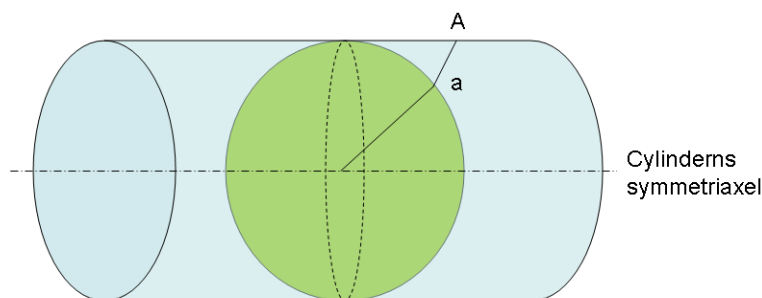
Man kan placera projektionscentrum på olika platser. Man särskiljer mellan tre fall (Figur 3.5):

- *Gnomonisk* – projektionscentrum i jordmodellens mitt (jfr Figur 3.4).
- *Stereografisk* - projektionscentrum i nadirpunkten (se förklaring i Figur 3.4).
- *Ortografisk* – projektionscentrum oändligt långt bort (vilket ger parallella linjer).



Figur 3.5. Gnomonisk, stereografisk och ortografisk projektion (av typen azimuthal).

Ovan har vi behandlat en kartprojektion som en projicering. En kartprojektion är dock sällan en projicering i egentlig bemärkelse. Projiceringar är enkla att hantera men saknar flera andra bra egenskaper (se avsnitt 3.2), och därför gör man oftast vissa avsteg ifrån projiceringar när man konstruerar kartprojektioner. I Figur 3.6 avbildas punkten *a* på jordmodellen på punkten *A* på kartplanet. Här har man gjort ett avsteg ifrån en sann projicering; linjen gör en liten riktningssändring vid jordmodellens yta. Storleken på riktningssändringen bestäms matematiskt utifrån önskade egenskaper hos kartprojektionen (se avsnitt 3.4).



Figur 3.6. Transversal cylinderprojektion. För förklaringar se texten.

3.2 Egenskaper och geometriska distorsioner

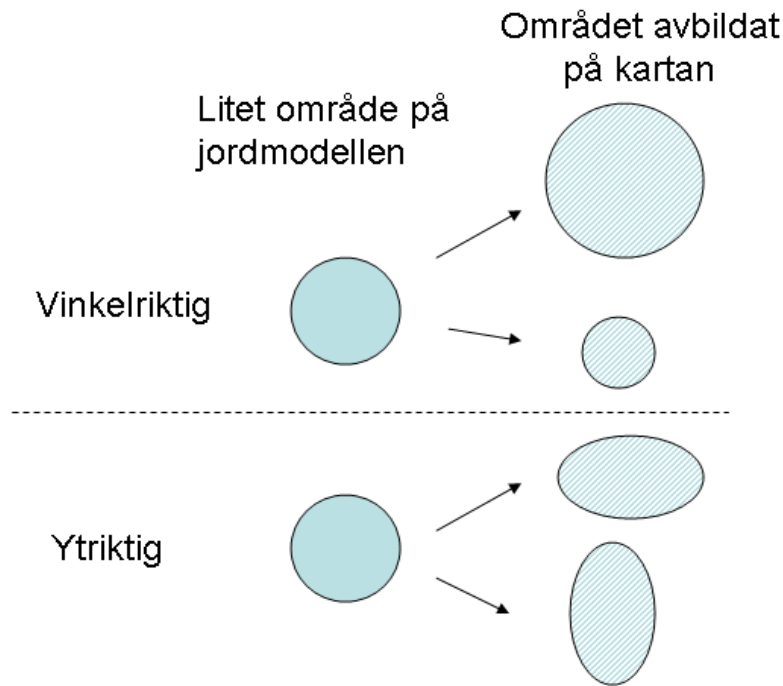
För att beskriva egenskaper hos en kartprojektion används frekvent begreppet *skala*. Skalan definieras som avstånd på kartan delat med avstånd i verkligheten, exempelvis motsvarar 1 cm i en 1:500 000-dels karta 5 000 meter i verkligheten. I praktiken är dock aldrig en skala konstant i en karta. Skalan varierar beroende på läget och/eller riktningen i kartan. När vi använder begreppet skala i detta kapitel syftar vi på den *relativa skalan* i en karta. Och när vi säger att skalan varierar menas att en 1:500 000-dels karta kan ha en skala som varierar mellan 1:499 900 i en del av kartan och en skala på 1:500 100 i en annan del av kartan. Vi kan således sluta oss till att en kartprojektion alltid förvränger verkligheten; i tekniska termer benämns denna förvrängning *geometrisk distorsion*.

Vanligtvis önskar man sig en av följande två egenskaper i en kartprojektion:

Vinkelriktighet (konformitet): I en vinkelriktig kartprojektion bevaras vinklar i skärningspunkten mellan linjer som korsar varandra. Exempelvis ska vinkeln i korsningen mellan en väg och en järnväg vara lika stor på kartplanet som i verkligheten. I en vinkelriktig karta är skalan lika stor i alla riktningar (inom ett oändligt litet område runt varje punkt). De flesta kartor idag, såväl på papper som på skärmen, är vinkelriktiga. Detta gäller för kartor från kommuner, lantmäteriet, sjöfartsverket och andra statliga myndigheter såväl som för karttjänster i mobiltelefoner.

Ytriktighet: I en ytriktig kartprojektion bevaras en figurs area. Detta är en viktig egenskap om man vill relatera storleken på olika geografiska områden till varandra. Ytriktiga kartprojektioner används ofta för världskartor, i tematiska atlaser, och andra småskaliga kartor samt för viss statistisk och annan tematisk information.

Figur 3.7 illustrerar egenskaper hos vinkelriktiga respektive ytriktiga projektioner. När ett litet cirkelformat område på jordmodellen avbildas på en karta med en vinkelriktig projektion kommer området att förbli en cirkel. Rent generellt gäller att en vinkelriktig projektion bevarar formen på objekt. Detta är en följd av att i en vinkelriktig projektion är skalan lika stor i alla riktningar. Dock varierar skalan mellan olika punkter på kartan vilket gör att cirkelns storlek kan variera. I en ytriktig projektion varierar skalan i alla riktningar (sett från en och samma punkt). Därmed bevaras inte formen på objekt. Dock är den genomsnittliga skalan (sett över alla riktningar) lika stor i alla punkter på kartan; därmed bevaras den relativa storleken på objekt.



Figur 3.7. Egenskaper hos vinkelriktiga och ytriktiga projektioner.

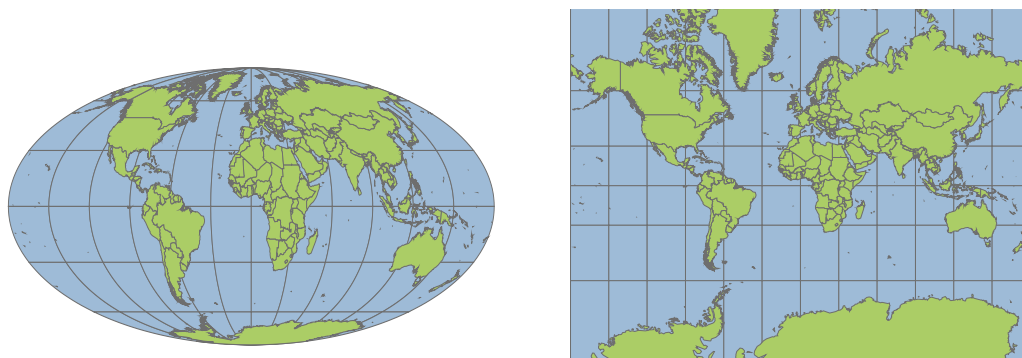
Idealet vore att kombinera vinkelriktighet och ytriktighet i kartprojektioner. Från Figur 3.7 ser vi att om det skulle gå att kombinera dessa skulle det innebära att skalan är lika stor överallt i kartan samt att skalan är lika stor i alla riktningar. Detta skulle innebära en perfekt avbildning, vilket är omöjligt; det är således inte möjligt att kombinera vinkelriktighet och ytriktighet i kartprojektioner.

En annan egenskap för en kartprojektion är *längdriktighet*. Med längdriktig menas att skalan är konstant. Man ska dock vara försiktig med denna beteckning eftersom en kartprojektion aldrig helt kan vara längdriktig överallt (för då vore den en perfekt avbildning) utan endast längdriktig längs vissa linjer i kartan. Det går att kombinera längdriktighet längs vissa linjer med vinkelriktighet eller ytriktighet.

Det finns ingen direkt koppling mellan den principiella uppbyggnaden av en kartprojektion och egenskaperna hos densamma. Det finns en del cylindriska projektioner som är vinkelriktiga och andra cylindriska projektioner som är ytriktiga. Ett vanligt missförstånd är att vinkelriktiga projektioner, som ofta benämns konforma, skulle vara koniska projektioner. Begreppen *konforma* och *koniska* har helt skilda betydelser och ska inte blandas ihop.

Inom mättningsverksamhet används uteslutande vinkelriktiga kartprojektioner. Anledningen är att för dessa kartprojektioner är skalan densamma i alla riktningar. Detta gör att de kartprojektionskorrektioner man måste använda inom mättningsverksamhet (se avsnitt 3.5) blir enklare än om man hade använt en ytriktig projektion.

Om man avbildar jorden i en vinkelriktig respektive ytriktig kartprojektion får man helt olika intryck av världens kontinenter (Figur 3.8). I en ytriktig projektion är den relativa storleken riktig, men formen på kontinenterna är felaktig, medan formen bevaras bättre i den vinkelriktiga (i alla fall över inte alltför stora områden) på bekostnad av den relativa storleken. Ett exempel på det senare syns i kartan till höger i Figur 3.8 där polområdena är överdrivet stora i jämförelse med områden nära ekvatorn.

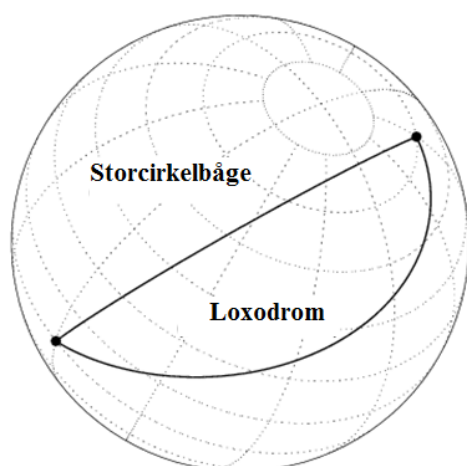


Figur 3.8. (Vänster) Ytriktig projektion (Mollweide, pseudocylindrisk projektion). (Höger) Vinkelriktig projektion (Mercator, normal cylindrisk projektion). Källa: Data från ESRI.

3.3 Beskrivning av några vanliga kartprojektioner och dess parametrar

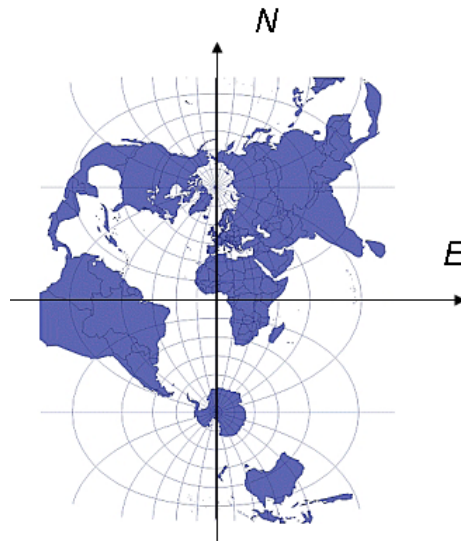
3.3.1 Några vanliga kartprojektioner

Den mest kända normala cylindriska projektionen är Mercator-projektionen, som introducerades av Gerardus Mercator (1512–1594) (se Figur 3.3b och Figur 3.8 höger). I Mercator-projektionen placeras cylindern antingen så att den tangerar ekvatorn, vilket gör att skalan blir riktig vid ekvatorn, eller så att cylindern skär jordmodellen genom två parallellcirkel. Meridianerna blir räta linjer med lika avstånd mellan varandra, och parallellcirkelarna blir räta linjer, vinkelräta mot meridianerna men med ojämna avstånd emellan dem. Projektionen är utmärkt för navigation, eftersom den är både vinkelriktig och avbildar *loxodromerna* som räta linjer. En loxodrom är en linje med konstant asimut, dvs. den följer en given kompassriktning (Figur 3.9). Loxodromen är en god approximation av närmaste vägen på korta avstånd, men för längre avstånd måste kortaste vägen tas fram utifrån storcirkeln respektive geodetiska linjen (se avsnitt 2.3). Mercator-projektionen avbildar polära regioner som mycket större än regioner nära ekvatorn, vilket gör att man lätt får ett felaktigt intryck av geografiska områdens relativa storlek. I Sverige har projektionen använts till sjökort och i ekvatornära områden är den använd för topografisk kartläggning. Till viss del är den även använd för världskartor och översikter i atlas. En variant av Mercator-projektionen, den så kallade webb-Mercator, har blivit en de-facto standard i webbaserade karttjänster och används av de flesta internationella karttjänsterna.



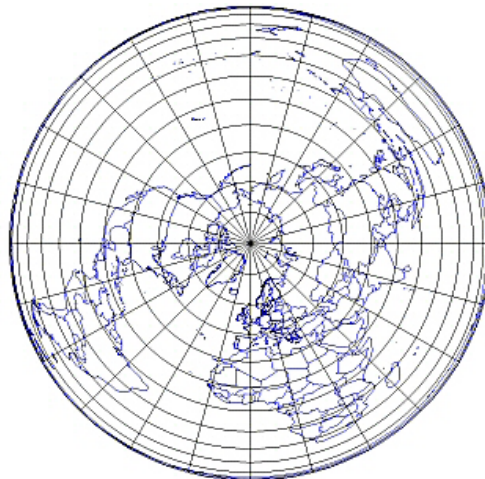
Figur 3.9. En storcirkelbåge är närmaste vägen mellan två punkter på en sfär. En loxodrom skär alla meridianer med samma vinkel, dvs. den har en konstant asimut (kompasskurs).

Den *transversala Mercator-projektionen* introducerades för sfärer av Johann Lambert (1728-1777) och för ellipsoider av Carl Friedrich Gauss (1777-1855); den vidareutvecklades senare av Louis Krüger. Den är därför även känd under namnet *Lamberts projektion* (sfär) och *Gauss-Krügers projektion* (eller bara *Gauss projektion*) (ellipsoid). Projektionen är vinkelriktig. Även i detta fall kan man låta cylindern antingen tangera en meridian eller skära jordmodellen längs två meridianer. Om cylindern tangerar jorden så konvergerar meridianerna bågformigt mot medelmeridianen, och skär varandra i polen (Figur 3.10). Hela klotet bör inte avbildas, på långa avstånd från medelmeridianen blir deformationen kraftig. Projektionen lämpar sig speciellt väl för ganska smala områden med största utbredning i nord-sydlig ledd. Den transversala Mercator-projektionen ligger till grund för i princip all mätning och kartläggning i Sverige (se 4.2.3) och är även vanligast i övriga Europa för det ändamålet.



Figur 3.10. Transversal Mercator-projektion, gradnät 15° . Medelmeridian går genom Greenwich. E-axeln sammanfaller med ekvatorn och N-axeln med medelmeridianen. Källa: Lantmäteriet.

Lamberts ytriktiga azimutalprojektion är en ytriktig projektion (Figur 3.11). Om tangeringspunkten är i någon av polerna avbildas meridianerna som rätta linjer genom polen i korrekta vinklar. Kartprojektioner används bland annat för gemensam tematisk information inom Europa (t.ex. för databaser om markanvändning).



Figur 3.11. Lamberts ytriktiga azimutalprojektion, gradnät 15° . Källa: Lantmäteriet.

Kapitel 3: Kartprojektioner

Mollweide är en ytriktig projektion (se Figur 3.8 vänster). Projektionen är inte strikt cylindrisk men har vissa likheter med en (transversal) cylindrisk projektion och benämns därför pseudocylindrisk. Medelmeridianen avbildas som en rät linje av halva den avbildade ekvatorns längd (lika med $2R\sqrt{2}$). Övriga meridianer avbildas som halva ellipser, avsatta på konstanta avstånd längs ekvatorn. Meridianerna 90° väst och 90° öst bildar en cirkel med ytan $2\pi R^2$ (lika med ytan av halva sfären), och radien $R\sqrt{2}$. Hela jordklotet avbildas i en ellips (med ytan $4\pi R^2$). Parallellerna avbildas som räta linjer parallella med ekvatorn. Projektionen förekommer t.ex. i atlaser.

För specifika tillämpningar används ofta kartprojektioner som har trevliga egenskaper för just det användningsområdet. För att visa flygrutter från en flygplats används ofta en azimutal projektion där man lagt tangeringspunkten vid flygplatsen. Detta gör att alla flyglinjer blir mer eller mindre raka linjer ut från flygplatsen. Inom planetkartografin används oftast ortografiska azimutala projektioner (jfr Figur 3.5); naturligt med tanke på att det är så vi ser månen och andra himlakroppar i våra teleskop härifrån jorden. En variant av ortografisk projektion används också i *Google Earth* när man börjar zooma in mot jorden.

3.3.2 Kartprojektionsparametrar

Man kan variera alla kartprojektioner genom att låta cylindern, konen eller planet tangera jorden på olika sätt, genom att flytta origo för koordinatsystemet i kartprojektionsplanet etc. För att definiera hur man projicerar sina geografiska koordinater på ett plan räcker det således inte med att tala om *vilken* kartprojektion man använder, utan även *hur* man använder den. Detta gör man genom att specificera ett antal *kartprojektionsparametrar*. Vilka parametrar som används varierar mellan olika projektioner.

För den transversala Mercator-projektionen används följande kartprojektionsparametrar:

- *medelmeridianen* (longitudvärde),
- *förstoringsfaktorn* (skalfaktorn längs medelmeridianen),
- koordinattillägg i nord-sydlig riktning (*N-tillägg*), och
- koordinattillägg i öst-västlig riktning (*E-tillägg*).

Den första parametern anger den centrala meridianen där cylindern tangerar eller runt vilken den skär jordmodellen. Om den andra parametern, förstoringsfaktorn, sätts lika med 1,0 innebär det att kartprojektionens längdriktning är lik medelmeridianens (skalan ökar sedan med avstånd från medelmeridianen). De två sista parametrarna anger förskjutning av origo för koordinatsystemet. I Figur 3.10 ligger origo i skärningen mellan medelmeridianen och ekvatorn, vilket gäller om *N-* och *E-tilläggen* sätts lika med noll. I de flesta tillämpningar (på norra halvklotet) är det lämpligt att beräkna *N*-koordinaten från ekvatorn och därför sätts *N-tillägget* lika med noll. Det är dock opraktiskt att låta *N*-axeln sammanfalla med medelmeridianen eftersom man oftast vill kartera på båda sidor av denna meridian. För att undvika negativa koordinater använder man därför ett *E-tillägg*.

3.3.3 Val av kartprojektion och kartprojektionsparametrar

Om man själv har möjlighet att påverka vilken kartprojektion som ska användas bör man ställa sig ett par frågor. Den första frågan är om det är lämpligast att använda en vinkel- eller ytriiktig projektion. Vid all mättningsverksamhet ska man använda en vinkelriktig projektion, men för lagring och presentation av data (t.ex. skärmkartor) kan det vara lämpligt att använda en ytriiktig projektion i vissa fall. Den andra frågeställningen är vilken kartprojektion och vilka parametrar man bör använda. Grundregeln är att man önskar få så liten deformation av jorden som möjligt. Lite förenklat bör man välja en kartprojektion vars cylinder, kon eller plan nära ansluter till det område som ska mätas eller karteras. Ska man t.ex. presentera ett område som är utsträckt långt i nord-sydlig riktning är transversala cylinderprojektioner bra och för områden som är mer vidsträckt i öst-västlig riktning kan en normal konisk projektion vara ett gott alternativ. Vidare bör man generellt använda en standardiserad kartprojektion (inklusive värden på parametrarna) om en sådan finns att tillgå. Det underlättar för användaren om hen använder en känd kartprojektion.

3.3.4 Universal Transversal Mercator (UTM)

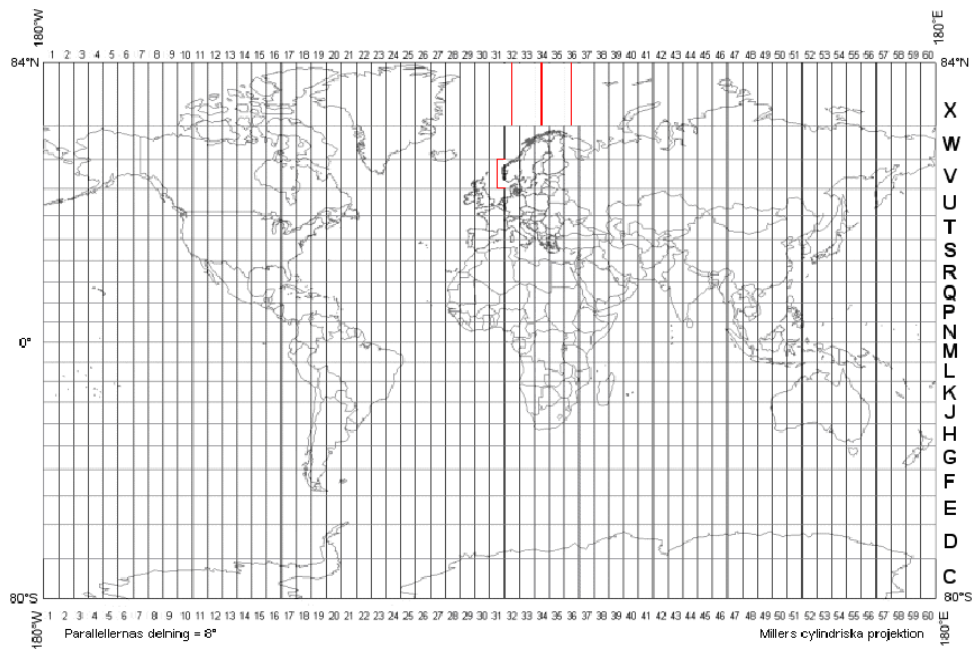
UTM introducerades av det amerikanska försvaret 1947 i syfte att upprätta ett enhetligt projektionssystem för kartor över hela jordklotet. Jorden delas in i 60 zoner om 6° longitud var mellan latituderna 84°N och 80°S (Figur 3.12). Zonernas numrering startar vid datumgränsen (180°E) och zonerna numreras österut. Varje zon avbildas sedan med en transversal Mercator-projektion (Figur 3.10) med fördefinierade parametrar för varje zon. För de polära områdena används den så kallade *Universal Polar Stereographic* (UPS)-projektion, vilken är en vinkelriktig stereografisk azimutal projektion (jfr Figur 3.5).

För varje UTM-zon används följande kartprojektionsparametrar för den transversala Mercator-projektionen:

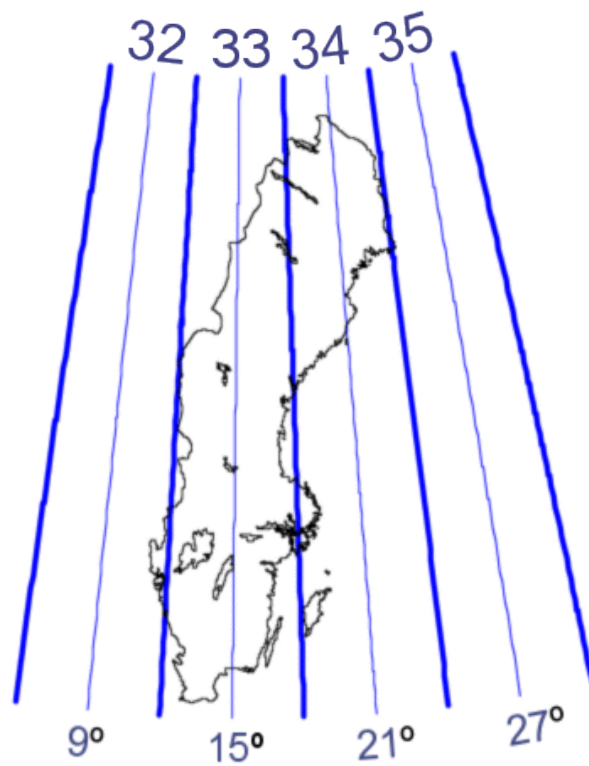
- Medelmeridianen ligger mitt i respektive zon, exempelvis har zon 31 medelmeridianen $+3^\circ$ (dvs. 3 grader öster om Greenwich).
- Förstoringsfaktorn är 0,9996. Faktorn är vald för att minimera det maximala skalfelet i zonen. Med denna skalfaktor blir sträckorna lite för långa i zonens ytterområden och något för korta längs medelmeridianen (i förhållande till hur långa sträckorna är i verkligheten).
- *N*-tillägg är 0 m norr om ekvatorn och 10 000 000 m söder om ekvatorn.
- *E*-tillägg är 500 000 m (vilket innebär positiva koordinatvärden i hela zonen).

UTM är idag det projektionssystem som de flesta länder i Europa (inklusive Sverige) använder för sin officiella kartläggning; mer om detta kommer i kapitel 4. Stora delar av Sverige ligger i UTM zon 33, men landet går även in i zonerna 32, 34 och snuddar även zon 35 (Figur 3.13). Medelmeridianen för zon 33 ligger på 15° öster om Greenwich.

Kapitel 3: Kartprojektioner



Figur 3.12. Zonindelning i UTM.



Figur 3.13. Zonindelning för UTM i Sverige.

3.4 Formler för kartprojektioner

I detta avsnitt kommer vi att studera explicita matematiska uttryck för Mercator-projektionen, men först behöver vi ge lite mer matematisk bakgrund.

3.4.1 Matematisk bakgrund

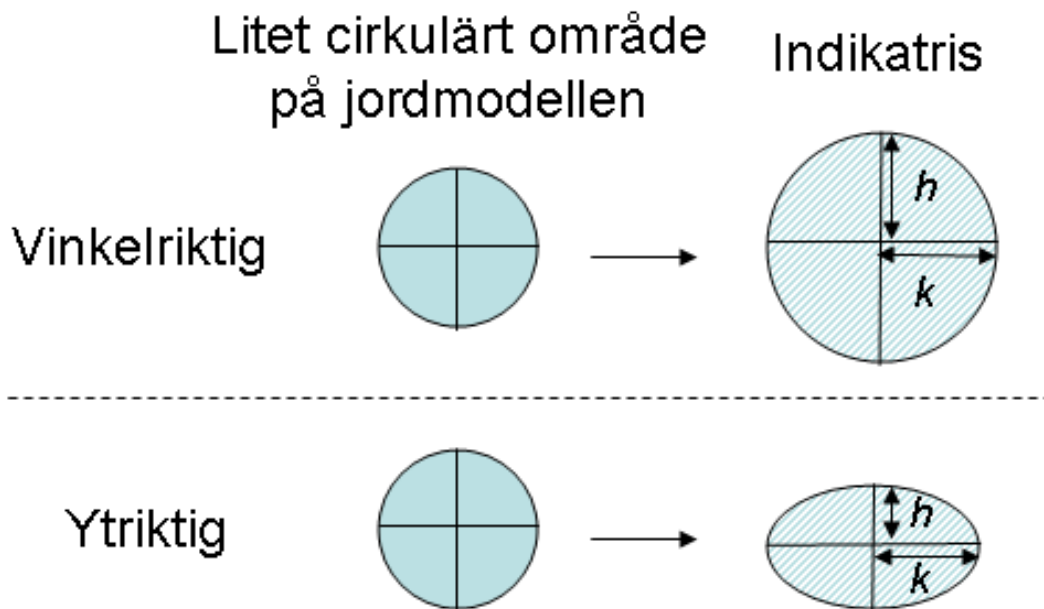
I Figur 3.7 och Figur 3.14 studeras hur ett litet cirkulärt område på jordmodellen avbildas på planet med en vinkelriktig respektive ytriktig projektion. Den cirkel/ellips som uppkommer på kartan vid denna avbildning bestäms av halvaxlarna h och k (jfr Figur 3.14). Baserat på diskussionen i avsnitt 3.2 fås följande samband:

$$\text{vinkelriktiga projektioner} \rightarrow h=k \quad 3.2$$

och

$$\text{ytriktiga projektion} \rightarrow hk=1 \quad 3.3$$

I egentlig mening ska det cirkulära området vara infinitesimalt litet (ofta benämnt elementarcirkel) och den avbildas som en infinitesimalt liten cirkel/ellips, s.k. *indikatrixen* eller *elementarellipsen*. Tolkningen av parametern h blir således: Om man rör sig ett infinitesimalt avstånd längs en meridian, hur långt kommer man då att röra sig på kartan (dvs. en partiell derivator). Tolkningen av k sker på analogt vis för en förflyttning längs en parallellcirkel.



Figur 3.14. Ett litet cirkulärt område på jordmodellen avbildas på ett kartplan; avbildningen blir en indikatrix.

3.4.2 Härledning av Mercator-projektionen

Mercator-projektionen är en vinkelriktig normal cylinderprojektion för en sfärisk jordmodell. Om man studerar Figur 3.3b och Figur 3.8 (höger) ser man att Mercator-projektionen avbildar gradnätet som ett rutnät, dvs. alla meridianer blir vertikala linjer och parallellcirkel blir horisontella linjer. Detta innebär i sin tur att för Mercator-projektionen är N -koordinaten endast en funktion av latituden (oberoende av longituden) och E -koordinaten endast en funktion av longituden (oberoende av latituden). Vi har således följande symboliska uttryck för Mercator-projektionen:

$$\begin{aligned} E &= f_E(\lambda_s) \\ N &= f_N(\varphi_s) \end{aligned} \tag{3.4}$$

För att härleda funktionerna f_E och f_N behöver vi lite mer bakgrundsteori. Mercator-projektionen är *halvperspektivistisk* (Figur 3.15). Med halvperspektivistisk menas att den är *perspektivistisk* (dvs. kan beskrivas med en projektion) i ena riktningen men inte i andra riktningen. Mercator-projektionen är perspektivistisk i öst-västlig led vilket ges av den vänstra delen av Figur 3.15. Avbildningen sker här med räta linjer från projektionscentrum (sfärens mitt) via jordmodellens yta för att sedan nå kartprojektionsplanet (vilket är cylinderns mantelyta). I nord-sydlig riktning är dock inte Mercator-projektionen en sann perspektivistisk avbildning. På liknande sätt som i Figur 3.6 (fast här för en stående cylinder) gör linjen en riktningsförändring när den passerar jordmodellens yta (Figur 3.15 höger).

I Mercators-projektion har alla punkter som ligger längs med Greenwich-meridianen $E = 0$. E -koordinaten ökar sedan när man rör sig österut. Från den vänstra delen av Figur 3.15 ser vi att en punkt med sfärisk longitud λ_s kommer att avbildas på cirkelns mantelyta på avståndet $R \cdot \lambda_s$ från meridianen genom Greenwich. Vi har därmed:

$$E = f_E(\lambda_s) = R\lambda_s \tag{3.5}$$

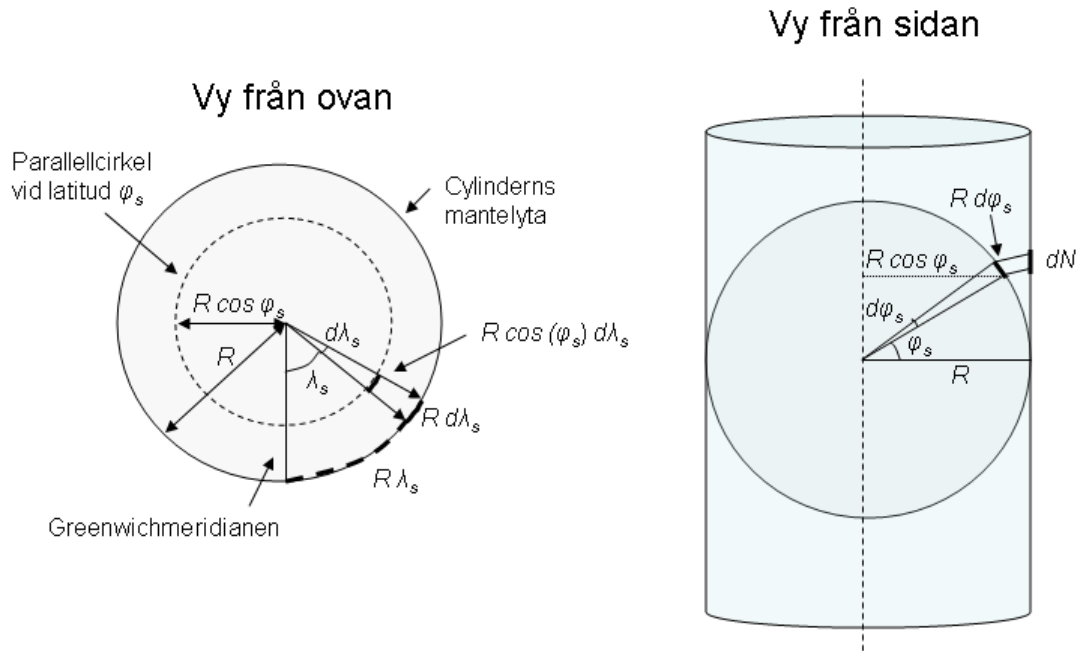
där R är radien på den sfäriska jordmodellen och longituden uttrycks i radianer.

Nu återstår att härleda funktionen f_N vilket blir svårare eftersom projektionen inte är perspektivistisk i denna riktning. I stället utnyttjas att Mercator-projektionen är en vinkelriktig projektion och således gäller att $h = k$ överallt. Om vi kan bestämma uttryck för h och k kan vi med hjälp av dessa uttryck härleda hur funktionen f_N ser ut. För att bestämma h och k börjar vi med att studera Figur 3.15. I den högra figuren kan vi se att en infinitesimal förflyttning längs en medelmeridian ($= R d\varphi_s$) motsvaras av en förflyttning dN på kartan. Således fås följande uttryck för halvaxeln h hos indikatrisen:

$$h = \frac{dN}{R d\varphi_s} \tag{3.6}$$

där latituden uttrycks i radianer. I den vänstra delen av Figur 3.15 ser vi att en infinitesimal förflyttning på den sfäriska jordmodellen på $R \cos(\varphi_s) d\lambda_s$ motsvaras av en förflyttning på cylindern på $R d\lambda_s$ (vi har här utnyttjat att Mercator-projektionen är en perspektivistisk transformation i öst-västlig riktning). Alltså erhålls följande uttryck för halvaxeln k hos indikatrisen:

$$k = \frac{R d\lambda_s}{R \cos(\varphi_s) d\lambda_s} = \frac{1}{\cos \varphi_s} \tag{3.7}$$



Figur 3.15. Avbildning från sfär till cylinder med Mercator-projektionen.

I nästa steg utnyttjas att Mercator-projektionen är en vinkelriktig projektion ($h = k$) tillsammans med de härledda uttrycken för h och k , vilket ger följande ekvation:

$$\frac{dN}{R d\varphi_s} = \frac{1}{\cos \varphi_s} \Rightarrow dN = R \frac{d\varphi_s}{\cos \varphi_s} \quad 3.8$$

Ekvation 3.8 är en separabel differentialekvation som kan lösas med hjälp av integrering. Om man studerar en tabell för integraler, och kompletterar med formel 3.5 (samt använder bivillkoret att $N=0$ vid ekvatorn), fås slutligen följande uttryck för Mercator-projektionen:

$$N = R \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_s}{2} \right) \right) \quad 3.9$$

$$E = R\lambda_s$$

där den sfäriska latituden och longituden anges i radianer.

Exempel 3.1: Hur långt är det mellan Smygehuk (S) och Treriksröset (T) i Mercator-projektionen. Använd en sfärisk jordmodell med radien $R=6\,370\,000$ m.

Använd följande sfäriska koordinater:

$$\text{Smygehuk: } \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{s,S} = 13^\circ 21' 34,16'' \\ \varphi_{s,S} = 55^\circ 09' 24,39'' \end{array} \right\}$$

$$\text{Treriksröset: } \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{s,T} = 20^\circ 32' 55,01'' \\ \varphi_{s,T} = 68^\circ 55' 52,32'' \end{array} \right\}$$

Lösning: Ansatsen är att beräkna N - och E -koordinater för både Smygehuk och Treriksröset. Sen beräknas avståndet i projektionsplanet med hjälp av Pythagoras sats.

Genom att tillämpa formel 3.9 fås följande koordinater i Mercator-projektionen:

Kapitel 3: Kartprojektioner

Smygehuk: $N_S = 7\,382\,921,8$ m $E_S = 1\,485\,274,2$ m

Treriksörset: $N_T = 10\,715\,760,7$ m $E_T = 2\,284\,542,9$ m

Sedan beräknas avståndet i projektionsplanet:

$$d_{\text{Mercator}} = \sqrt{(N_S - N_T)^2 + (E_S - E_T)^2} \approx 3\,427\,338 \text{ m}$$

Svar: Avståndet mellan Smygehuk och Treriksörset i Mercator-projektionen är 3 427 338 m.

Kommentar till svaret: Om vi jämför med Exempel 2.3 ser vi att Sverige är dubbelt så långt i Mercator-projektionen som i verkligheten. Detta innebär att Mercator-projektionen har ett stort skalfel här och inte kan tillämpas inom mätningstillämpningar i Sverige. Generellt gäller att skalan i Mercators-projektionen är lika med $\frac{1}{\cos \varphi_s}$ vilket ger en skalfaktor två vid en latitud på 60 grader. Detta stämmer överens med vår beräkning av Sveriges längd. •

3.4.3 Formler för transversal Mercator-projektion

Formlerna för transversal Mercator-projektion (och UTM) är betydligt mer komplicerade än för den normala Mercator-projektionen. Formlerna innehåller långa serieutvecklingar och lämpar sig inte för beräkningar med endast miniräknare. Däremot är det relativt enkelt att skriva ett datorprogram för att utföra dessa beräkningar.

Exempel 3.2: Hur långt är Sverige i kartprojektionerna UTM zon 33? Använd jordellipsoiden GRS 80.

Använd följande geografiska koordinater:

$$\text{Smygehuk: } \left\{ \begin{array}{l} \lambda_S = 13^\circ 21' 34",16 \\ \varphi_S = 55^\circ 20' 13",27 \end{array} \right\}$$

$$\text{Treriksörset: } \left\{ \begin{array}{l} \lambda_T = 20^\circ 32' 55",01 \\ \varphi_T = 69^\circ 3' 35",89 \end{array} \right\}$$

Lösning: Ansatsen är att beräkna N - och E -koordinater för både Smygehuk och Treriksörset. Sen beräknas avståndet i projektionsplanet med hjälp av Pythagoras sats.

Genom att tillämpa ett beräkningsprogram fås följande koordinater i UTM zon 33:

Smygehuk: $N_S = 6\,133\,521,06$ m $E_S = 395\,945,36$ m

Treriksörset: $N_T = 7\,671\,055,36$ m $E_T = 721\,050,14$ m

Sedan beräknas avståndet i projektionsplanet:

$$d_{\text{Mercator}} = \sqrt{(N_S - N_T)^2 + (E_S - E_T)^2} \approx 1\,571\,529 \text{ m}$$

Svar: Avståndet mellan Smygehuk och Treriksörset i UTM zon 33 är 1 571 529 m.

Kommentar till svaret: Om vi jämför med Exempel 2.3 ser vi att Sverige är 393 meter kortare i UTM zon 33 än på ellipsoiden. Att avståndet är kortare är en följd av att sträckan Smygehuk till Treriksörset till delar går relativt nära medelmeridianen för zon 33 (Figur 3.13) samt att en förstoringfaktor på 0,9996 används av UTM, vilket innebär

ett skalfel på 0,4 ‰ längs medelmeridianen. Skalfelet mellan Smygehuk och Treriksröset blir lite mindre, omkring 0,25 ‰.

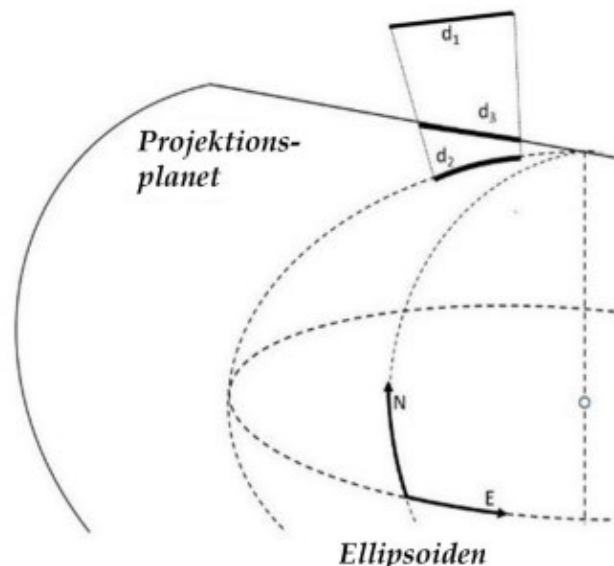
3.5 Kartprojektions- och lutningskorrigerings av mätningar

När man utför geodetiska och fotogrammetriska mätningar används mycket ofta koordinater i ett kartprojektionsplan. Eftersom skalan i ett kartprojektionsplan inte är konstant måste man i många fall kompensera för detta. För att ta ett exempel. Pondera att du mätt en horisontell sträcka och att mätningar ger att sträckan är 200,00 meter på marken och du är intresserad av att beräkna sträckans längd i en UTM-projektion. Eftersom du befinner dig nära medelmeridianen är skalfaktorn 0,9996. Detta innebär att sträckan är endast 199,92 meter i kartprojektionsplanet.

Vid noggrann geodetisk mätning av längder behövs mer exakta korrekationer. Först måste det mätta lutande avståndet på jordens yta (d_1) räknas om till avståndet på jordellipsoiden (d_2), vilket görs genom att applicera lutnings- och höjdkorrekationer. Därefter räknas d_2 på ellipsoiden om till avståndet i projektionsplanet (d_3) genom att applicera en projektionskorrektur. Dessa avstånd illustreras i Figur 3.16. Om man till exempel använder en transversal Mercator-projektion med längdriktig medelmeridian, kan följande projektionskorrektur utnyttjas (om man är närmare än 100 km från medelmeridianen och avståndet ifråga är kortare än 8 km),

$$d_3 = d_2 \left(1 + \frac{\bar{E}^2}{2R^2} \right) = d_2 \left(1 + \left(\frac{E_A + E_B}{2\sqrt{2}R} \right)^2 \right), \quad 3.10$$

där \bar{E} är medelvärdet av ändpunkternas Easting-koordinater i förhållande till medelmeridianen (E-tillägget är alltså noll) och R är ellipsoidens medelkrökningsradie. Lägga märke till att projektionskorrektur av avståndet är noll vid medelmeridianen och växer kvadratisk när avståndet från medelmeridianen ökar.

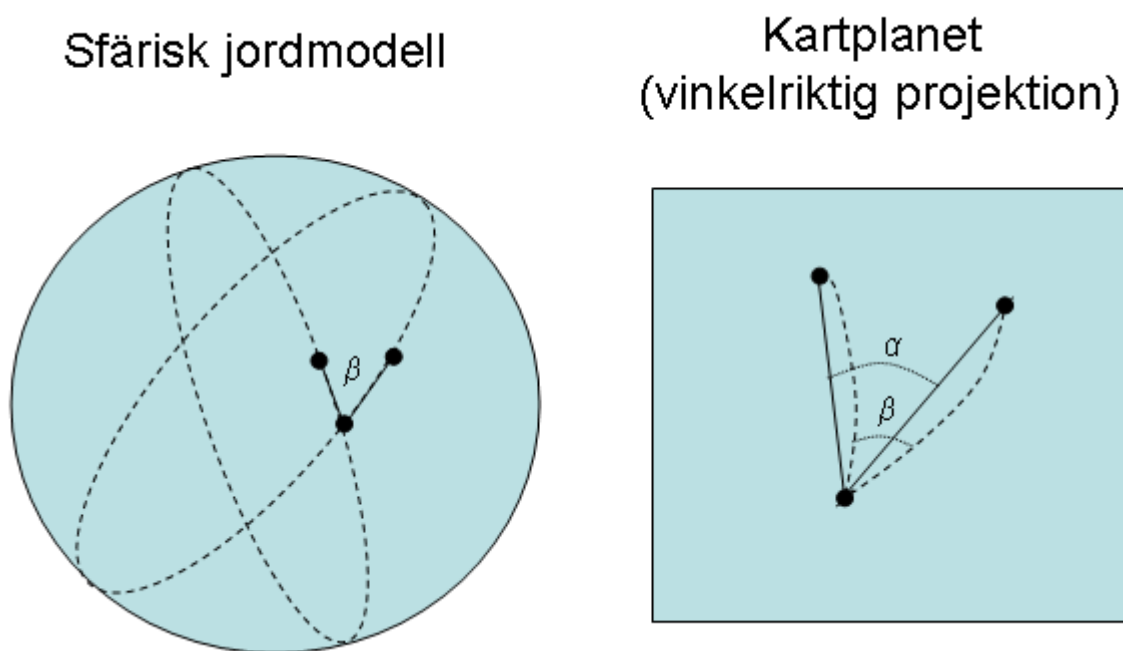


Figur 3.16. Korrektur av det mätta lutande avståndet, d_1 , till avståndet på jord-ellipsoiden, d_2 , och slutligen vidare till avståndet i projektionsplanet, d_3 . Easting-koordinaten E förutsätts här referera till medelmeridianen (dvs. $\Delta E = 0$). Källa: HMK-Stommätning (2020).

Kapitel 3: Kartprojektioner

Det räcker dock inte med att korrigera längden på en sträcka utan man måste även korrigera vinkelmätningar. Detta kan i första anblick verka onödigt om man använder en vinkelriktig kartprojektion. Problemet ligger i vilka typer av vinklar som bevaras i en vinkelriktig projektion. Studera Figur 3.17; på den vänstra sidan syns en sfärisk jordmodell med tre punkter utmärkta. Vidare är närmaste vägen mellan en punkt och de två övriga punkterna utritade, där den närmaste vägen (på den sfäriska jordmodellen) utgör en del av en storcirkelbåge. Sfären är sedan avbildad med en vinkelriktig kartprojektion (högra delen av figuren). Eftersom projektionen är vinkelriktig bevaras vinklarna mellan storcirkelbågarna i kartplanet. Det är dock så att storcirkelbågarna inte avbildas som rätta linjer (vilket innebär att närmaste vägen i verkligheten inte är en rät linje i kartplanet!). Vid beräkning av koordinater i kartplanet (se kapitel 6) används vinkeln α som skiljer sig från vinkeln β , vilket är den vinkel man kan mäta med sitt mätinstrument eftersom man ser närmaste vägen mellan två punkter, vilket med god approximation överensstämmer med storcirkelbågarna (eller geodetiska linjerna vid en ellipsoidisk jordmodell).

För att minska behovet av kartprojektionskorrigeringar används ofta lokala kartprojektioner för praktisk mättningsverksamhet inom t.ex. kommuner och infrastrukturprojekt (exempel på sådana kartprojektioner ges i avsnitt 4.2.4). Dessa kartprojektioner är anpassade så att de ger små distortioner inom det område där projektionen används. Projektionskorrektion av *avstånd* behöver ändå som regel göras vid noggrann geodetisk mätning; korrektionerna i en lokal kartprojektion kan typiskt bli så stora som 50 mm för en 1 km lång längd. Motsvarande korrektion av vinklar behöver å andra sidan endast användas vid terrestra (markbundna, se kapitel 6) vinkelmätningar över riktigt långa avstånd (>10 km), vilket är mycket ovanligt idag. Mätning över riktigt långa avstånd har idag nästan helt ersatts med GNSS-mätning, se kapitel 10 och 11.



Figur 3.17. Vinklar som bevaras i en vinkelriktig projektion.

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021.

Tack: Delar av detta kapitel baserar sig på Harrie och Hauska (1999). Tack till Hans Hauska för att detta material fick användas. Mycket material är också hämtat ifrån Lantmäteriverkets hemsidor inom geodesi (se <http://www.lantmateriet.se>). Ett tack till författarna för att detta material fått användas. Detta kapitel har också inspirerats av kompendiet i kartprojektioner av Ilmar Ussisoo. /Lars Harrie och Jonas Ågren

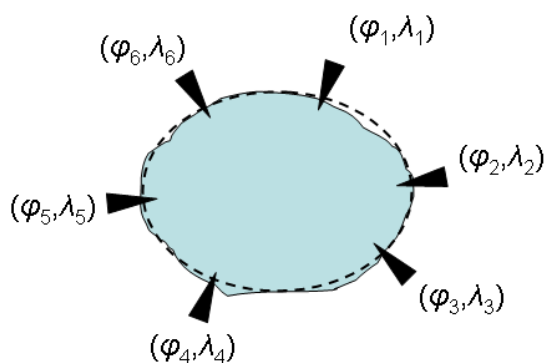
Lästips: Två kompendier om kartprojektioner är Ussisoo (1977) och Egeltoft och Stoimenov (1997). Ett par engelska böcker om kartprojektioner är Loxton (1980) och McDonnell (1979). En klassisk bok som innehåller formler för ett stort antal projektioner är Snyders (1987) *Map projections – a working manual*; den finns också fritt tillgänglig på Internet.

4 Geodetiska referenssystem

4.1 Introduktion

I kapitel 2 beskrevs hur man kan approximera jorden med en jordellipsoid. Denna jordellipsoid är inplacerad så att dess yta approximerar jordytan på ett bra sätt (Figur 4.4.1). All lägesangivelse, oavsett om man använder geografiska koordinater (latitud och longitud) eller om man använder kartprojektionskoordinater (N och E), sker relativt ellipsoiden. Detta medför att om ellipsoidens läge ändras så ändras t.ex. latitud- och longitudvärden för en fysisk punkt på marken; dvs. geografiska koordinater är inga absoluta storheter utan är beroende av ellipsoidens placering. För att få ett enhetligt koordinatsystem måste man således bestämma ellipsoidens placering i förhållande till jordytan; detta görs genom att man skapar ett *geodetiskt referenssystem* (ibland benämnt *geodetiskt datum*).

Ett geodetiskt referenssystem kräver främst två saker: (1) val av jordellipsoid (jfr Tabell 2.1), och (2) placering av jordellipsoiden i förhållande till jorden. Placeringen av jordellipsoiden bestäms genom att man fastställer koordinatvärden på ett antal punkter på markytan. Eftersom koordinatvärdena relateras till ellipsoiden och de fysiska punktmarkeringarna till jordytan så bestämmer koordinatvärdena jordellipsoidens placering i förhållande till jorden (Figur 4.4.1). De punkter som bestämmer ellipsoidens läge utgör grunden för referenssystemet och benämns *referenspunkter* (alternativt *stompunkter*).



Figur 4.4.1. Jordellipsoiden (streckad) är placerad så att den ansluter bra till geoiden. Ellipsoidens placering fixeras med hjälp av referenspunkter med kända koordinater (här markerade med trianglar).

Alla mätningar som utförs, oavsett vilken mätmetod man använder, sker relativt referenspunkterna för det geodetiska referenssystemet (eller relativt andra punkter som redan bestämts utgående från referenspunkterna). På så vis garanteras att alla punkter mäts in i samma referenssystem.

Enhetliga geodetiska referenssystem av hög kvalitet är en förutsättning för ett modernt informationssamhälle. Utan dessa referenssystem kan vi inte utnyttja noggranna mätningstekniker, t.ex. GNSS/GPS, och inte heller kan vi utbyta geografisk information på ett enkelt sätt. Därför har samhället lagt ner stora resurser på att definiera bra referenssystem. Detta är inget som sker endast i Sverige utan är i högsta grad ett internationellt arbete. I avsnitt 4.2 kommer vi att beskriva globala tredimensionella referenssystem och det svenska referenssystemet SWEREF 99 (som är globalt anpassat). Målet från statsmaktens sida, bl.a. uttryckt i den nationella geodatastrategin, är att lägesangivelse (i plan) av geografisk information alltid ska göras i SWEREF 99.

Det finns dock fortfarande geografisk information vars läge anges i äldre referenssystem, inte minst i arkivsammanhang (t.ex. förätningshandlingar). Vi beskriver därför även vissa äldre referenssystem (avsnitt 4.3).

Geodetiska referenssystem behövs även för höjdmätning och kallas då vanligen geodetiska höjdsystem. I avsnitt 4.4 förklarar vi hur sådana höjdsystem definieras och etableras samt beskriver det nuvarande svenska höjdsystemet, RH 2000, och en del äldre höjdsystem som fortfarande är i bruk. För viss höjdmätning krävs även en modell för geoidhöjden, vilken kallas för geoidmodell. Geoidmodeller och deras användning beskrivs vidare i avsnitt 4.5.

Termerna *referenssystem* och *koordinatsystem* är ofta svåra att hålla isär, och i många fall särskiljer man dem inte. I det här kompendiet använder vi följande definition av begreppen. Ett referenssystem specificerar inplaceringen av jordellipsoiden (för plana och tredimensionella system) och nollnivån (för höjdsystem). Till ett referenssystem kan man sedan koppla flera olika koordinatsystem, till exempel. kan positioner i referenssystemet SWEREF 99 uttryckas med hjälp av: (1) geocentriskt kartesiskt koordinatsystem, (2) geografiskt koordinatsystem och (3) ett koordinatsystem skapat med hjälp av en kartprojektion.

Det sista avsnittet i kapitlet (4.6) behandlar koordinattransformationer. Med en koordinattransformation menas en omräkning från koordinater i ett koordinatsystem (referenssystem) till ett annat koordinatsystem (referenssystem). Koordinattransformationer är i dagsläget mycket vanliga inom mättningsverksamheten. I Sverige används ett flertal olika koordinatsystem inom statlig, kommunal och privat verksamhet (vilket beskrivs i avsnitt 4.2–4.5). Vid utbyte av information mellan olika organisationer krävs därför ofta att man utför koordinattransformationer.

Det finns ett intimt samband mellan geodetiska referenssystem och mätmetoder. Å ena sidan skapas ett geodetiskt referenssystem med hjälp av bästa tillgängliga mätmetoder (och mätinstrument) vid en viss tidpunkt; å andra sidan måste referenssystemet klara även de krav som ställs när mätmetoder och mätinstrument förbättras i framtiden, vilket inte alltid är möjligt. Eftersom geodetiska referenssystem utgör grunden för all mätning kan man inte mäta noggrannare än den geometriska kvaliteten som finns inbyggd i referenssystemet. Ett exempel på relationen mellan referenssystem och mätningsteknik är den tidigare övergången från nationella referenssystemet RT 90 i plan (avsnitt 4.3) till det nuvarande globalt anpassade tredimensionella referenssystemet SWEREF 99 (avsnitt 4.2). Det fanns tre huvudskäl som motiverade att man gjorde denna övergång: (1) internationell anpassning, (2) förbättrad geometri (RT90 kan inte stödja noggrann GNSS-mätning över längre sträckor) och (3) modern GNSS-teknik mäter i tre dimensioner (till skillnad från markbunden teknik där man separerar plan- och höjdmätningar). RT 90 kunde alltså inte klara kraven för att utnyttja GNSS-tekniken fullt ut, och detta motiverade till stor del det mödosamma arbetet med att övergå till SWEREF 99. Samtidigt hade det varit omöjligt att skapa ett referenssystem med så hög kvalitet som SWEREF 99 utan att använda GNSS eller andra moderna satellittekniker.

4.2 Tredimensionella referenssystem

4.2.1 Globala referenssystem

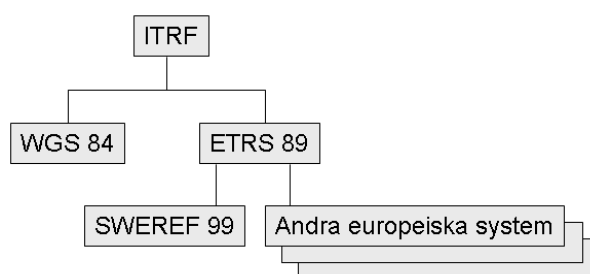
I ett *globalt anpassat referenssystem* har jordellipsoiden placerats in så att dess mittpunkt ligger så nära jordens tyngdpunkt som möjligt. I mittpunkten placeras origo för ett kartesiskt koordinatsystem, där Z-axeln sammanfaller med jordens rotationsaxel (passerar nord- och sydpolen), och där X- och Y-axeln ligger i ekvatorialplanet (X-axeln

Kapitel 4: Geodetiska referenssystem

skär Greenwich-meridianen och Y -axeln fullbordar ett högerorienterat system, se Figur 2.3). I de fall man idag önskar använda geografiska koordinater för ett globalt referenssystem används i princip alltid jordellipsoiden GRS 80 (se avsnitt 2.1 och Tabell 2.1).

Det finns idag flera globalt anpassade referenssystem. Anledningen till att man inte kan enas om ett gemensamt system är att jordytan inte är stabil. Kontinental-förskjutningen gör att jordens plattor (kontinenter) förflyttas i förhållande till varandra. Dessa förändringar är på ett antal centimeter per år, vilket är en anledning till att de mest noggranna referenssystemen behöver uppdateras med jämna mellanrum.

Det globala referenssystem som idag har högst status är ITRF (International Terrestrial Reference Frame), vilket är ett mycket noggrant system, med en standardosäkerhet på ett par centimeter i tre dimensioner sett över hela jorden. ITRF-systemen har en inbyggd hastighetsmodell som möjliggör kontinuerlig uppdatering av koordinaterna, vilket behövs för att hänga med i plattrörelserna. Sedan uppdateras själva ITRF-systemen med några års mellanrum; det som används idag (2021) är ITRF2014. Systemen används dels direkt i vetenskapliga sammanhang, dels som en grund för att definiera de andra globala referenssystem som används inom mättningsverksamhet runt om i världen (Figur 4.2). Anledningen till att inte ITRF används direkt som till exempel nationellt referenssystem är att koordinaterna förändras sig med tiden.



Figur 4.2. Några globala referenssystem baserade på ITRF-systemen.

Av praktiska skäl önskar man att samma globala referenssystem används i Europa. Därför har man enats om att alla europeiska länder ska använda samma ITRF-system (plattepok 1989.0) som grund för sina nationella system; detta europeiska system benämns ETRS 89 (European Terrestrial Reference System 1989). Den svenska realiseringen av ETRS 89 är SWEREF 99.

Det amerikanska satellitpositioneringssystemet GPS använder det globala referenssystemet WGS 84. Detta referenssystem uppdateras med jämna mellanrum genom att man använder ett aktuellt ITRF-system (Figur 4.2).

Eftersom alla globala system idag är baserade på ITRF är de relativt lika varandra. Skillnaden mellan ETRS 89 (inklusive SWEREF 99) och WGS 84 är drygt en halv meter, vilket är den relativa förflyttning den europeiska plattan gjort i ITRF sedan 1989. För alla tillämpningar där kraven på mätosäkerhet ligger på meternivå eller sämre kan man anse att alla de globala systemen är ett och samma system. I tjänster som t.ex. *Google Earth* används ofta referenssystemet WGS 84. I realiteten kunde det dock stått att ett globalt referenssystem används. Kanske vore detta också mer korrekt eftersom t.ex. svensk information i *Google Earth* snarare använder SWEREF 99 än WGS 84. Men som sagt, i tillämpningar med noggrannhetskrav på meternivå behöver vi inte göra skillnad på systemen. Däremot måste vi särskilja dem vid noggrannare tillämpningar. Inom samhällsmätning är det ofta krav på mätosäkerheten på cm-nivå, vilket diskvalificerar användningen av WGS 84 tillsammans med till exempel SWEREF 99.

Ur mätteknisk synvinkel finns det viktiga skillnader mellan de globala systemen. Det globala system där det finns ett tätt nät av referenspunkter (dvs. markerade punkter med kända koordinater) i Sverige är SWEREF 99. Även fast koordinater finns bestämda även i ITRF för ett mindre antal referenspunkter så är det inte tillräckligt för effektiv och noggrann geodetisk och fotogrammetrisk mätning. Med andra ord, det globala referenssystem som bör användas för dylika mätningar i Sverige är SWEREF 99, vilket även är det nationella globala referenssystemet.

4.2.2 SWEREF 99

Den svenska realiseringen av ETRS 89, SWEREF 99, är ett globalt tredimensionellt referenssystem. Termen *global* ska här tolkas som att ellipsoiden är globalt anpassad för SWEREF 99, och inte som att själva referenssystemet har en global täckning (SWEREF 99 används bara Sverige). Med SWEREF 99 som nationellt geodetiskt referenssystem fås en god överensstämmelse med såväl våra närmaste grannländer som resten av Europa. Vidare har systemet en hög geometrisk kvalitet vilket möjliggör att man kan uppnå en mätosäkerhet på cm-nivå även över mycket långa sträckor över hela landet.

SWEREF 99 används idag i så gott som all mättningsverksamhet och för nästan all digital geografisk information. Till exempel Lantmäteriet, andra statliga verk och kommuner använder nu SWEREF 99. Dock finns äldre information lagrad i t.ex. RT 90 och äldre kommunala system (se avsnitt 4.3.2), till exempel i arkiv som skulle kräva mycket manuellt arbete att uppdatera.

Koordinater i SWEREF 99 kan uttryckas med hjälp av de geocentriska kartesiska koordinaterna X , Y och Z (Figur 2.8), men detta görs vanligtvis bara i beräkningar. När SWEREF 99 koordinaterna lagras i databaser och presenteras används geografiska koordinater baserade på jordellipsoiden GRS 80. Eftersom SWEREF 99 är ett tredimensionellt koordinatsystem får man förutom latitud och longitud även höjden över ellipsoiden. Denna typ av höjd används dock inte som sådan, utan den transformeras i regel direkt till höjd över geoiden i referenssystemet RH 2000 (avsnitt 4.4.2); denna transformation beskrivs i avsnitt 4.5.1 nedan.

SWEREF 99 är skapat med hjälp av ett nationellt referensstationsnät för GNSS, benämnt SWEPOS (se Figur 11.3). På varje SWEPOS-station finns en GNSS-mottagare som mäter dygnet runt. Utifrån dessa mätningar kan man göra ytterst noggranna beräkningar om stationernas inbördes lägen (mätosäkerhet på centimeternivå eller t.o.m. bättre). Vidare ingår vissa av stationerna i internationella nät vilket är en förutsättning för att göra en bestämning av koordinaterna i internationella referenssystem (t.ex. ITRF).

SWEREF 99 definieras idag av koordinaterna för de ca 20 ursprungliga stationerna i SWEPOS-nätet. Dock finns det hundratals referenspunkter som är inmätta, på olika kvalitetsnivåer, i SWEREF 99. Uppgifter om dessa punkter kan fås från Lantmäteriets *digitala geodetiska arkiv* via webbtjänsten *Hitta stompunkt*. Ett exempel på sådana uppgifter är punktbeskrivningen i Figur 4.3.

Planpunkt: 137521 Långbro

Allmänt

Namn	Långbro
Stompunkt ID	202100-4888_137521
Alternativa ID	
Stomnät	Nationellt passivt referensnät i plan
Typ	Planpunkt
Kategori	Rikspunkt
Kommun	Gävle (2180) Gävleborgs län (21)
Markering	Rör i gjutning med däcksel

Historik

Plan

SWEREF 99 TM	N 6728087.609 E 605800.533
Ursprung	Utjämnad (SWEREF 99)
Mätmetod	Statisk GNSS
Mättningsdatum	2003
Beräkningsdatum	2006
Kvalitetsklass	2
Lägesosäkerhet	0.015 m

Höjd

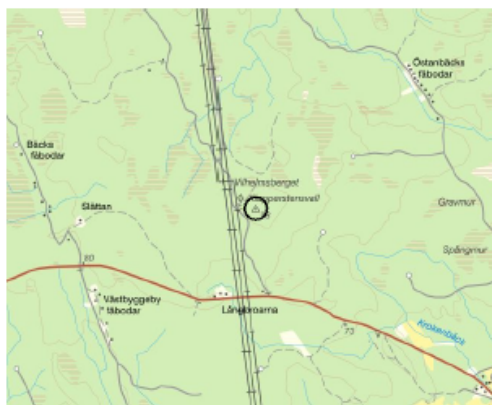
RH 2000	97.79
Ursprung	Utjämnad (RH 2000)
Mätmetod	Statisk GNSS
Mättningsdatum	2003
Beräkningsdatum	2009-01-12
Kvalitetsklass	2
Lägesosäkerhet	0.025 m
Markhöjd	
Äldre höjdsystem	97.589 (RH 70)

Lägesbeskrivning

11.0 km V om Gävle kyrka
7.2 km NNO om Forsbacka kyrka

Följ den i NNW - SSO riktning gående skogsbilvägen c:a 800 m fram till en kraftledning som korsar vägen. Följ därifrån en mindre skogsväg i Ö riktning c:a 200 m till dess slut, c:a 100 m N om punkten, som är belägen i en betongpelare nedgrävd bland stenarna på rullstensåsens topp.

Rör i betongpelare med däcksel



Anmärkningar

Övrigt

Punkten är på topografiska kartan benämnd Vilhelmsberget

Protokoll G 6424:39

4.2.3 SWEREF 99 TM

Inom mätverksamhet är det ofta opraktiskt att använda geografiska eller geocentriska kartesiska koordinatsystem. För att beräkna koordinater i planet är det betydligt lättare att använda ett tvådimensionellt koordinatsystem (N och E , Figur 3.1) i kartprojektionsplanet. För att underlätta koordinathanteringen är det enklast om alla använder samma kartprojektion, därför brukar det finnas en standardiserad kartprojektion (inklusive värden på kartprojektionsparametrarna) för ett geodetiskt referenssystem. För SWEREF 99 används en transversal Mercator-projektion (TM-projektion) baserad på UTM (avsnitt 3.3.4) som standard (vilket de flesta andra länder i Europa också gör). Denna kombination benämns SWEREF 99 TM.

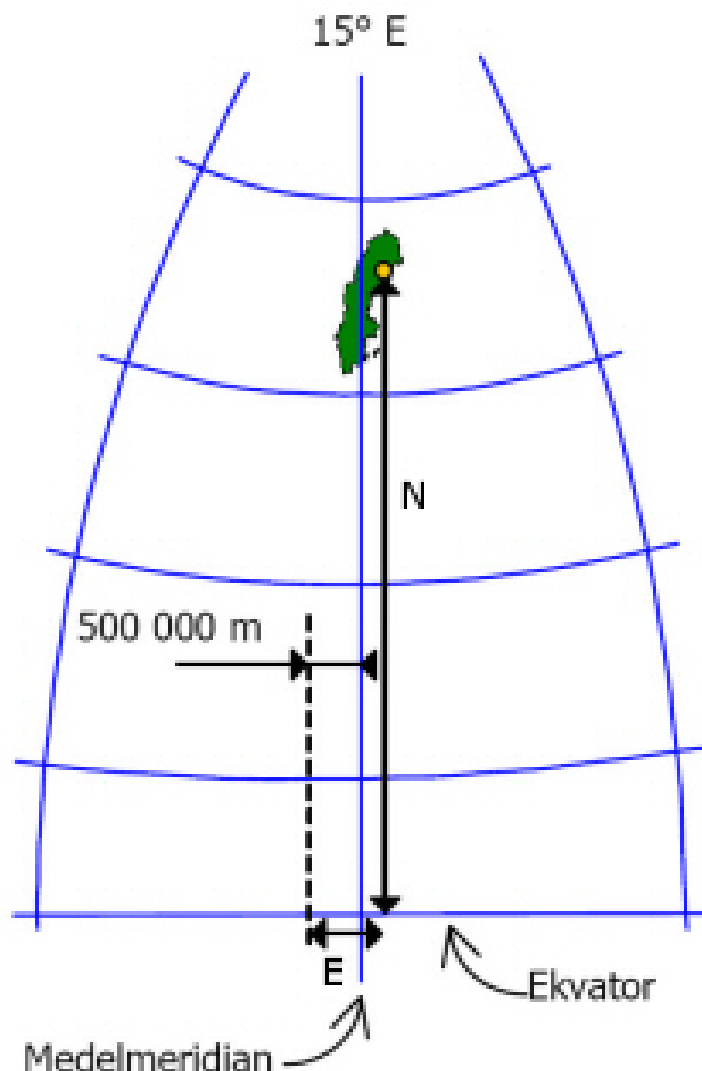
SWEREF 99 TM används idag inom Lantmäteriet för de nationella kartorna och karttjänsterna samt för de nationella databaserna med geografisk information. Även de flesta andra statliga myndigheter och privata organisationer använder SWEREF 99 TM för sina nationella geografiska databaser.

Sammanfattningsvis kan vi beskriva koordinatsystemet SWEREF 99 TM på följande sätt:

- 1) Det baseras på det geodetiska referenssystemet SWEREF 99.
- 2) Geografiska koordinater (latitud och longitud) är definierade på jordellipsoiden GRS 80.
- 3) De geografiska koordinaterna är projicerade med kartprojektionen TM (Transversal Mercator). Följande kartprojektionsparametrar används:
 - Medelmeridianen är 15 grader öster om Greenwich.
 - Förstoringsfaktorn är 0,9996.
 - N -tillägg är 0 m.
 - E -tillägg är 500 000 m.

Detta innebär att SWEREF 99 TM har samma värden på kartprojektionsparametrarna som UTM zon 33 (jfr avsnitt 3.3.4).

Figur 4.4 illustrerar hur koordinaterna definieras för SWEREF 99 TM. N -koordinaten anger avståndet till ekvatorn (här avses avståndet i kartprojektion och inte på ellipsoiden); detta innebär att N -koordinaterna numeriskt ligger mellan 6 100 000 m och 7 700 000 m i Sverige (jfr Figur 4.6). För E -koordinaten gäller följande: Alla punkter på medelmeridianen 15° har E -koordinaten 500 000 m (dvs. E -tillägget är 500 000 m). Sedan bestäms värdet på E -koordinaten med hjälp av avståndet i kartprojektion i öst-västlig riktning i förhållande till denna meridian.



Figur 4.4. Definition av koordinatsystemet för SWEREF 99 TM. E-axeln sammanfaller med ekvatorn och N-axeln med den streckade linjen (som ligger 500 000 meter väster om meridianen 15°). N- och E-koordinaterna bestäms sedan på vanligt sätt utifrån dessa axlar vilket här illustreras för en punkt längs norrlandskusten. Källa: Lantmäteriet

Vi bör observera att SWEREF 99 TM inte är någon strikt tillämpning av UTM-projektionen. En strikt sådan tillämpning skulle innebära att Sverige skulle delas in i fyra områden, alla med var sin medelmeridian (detta eftersom Sverige ligger i UTM-zon 32 till 35; zon 35 skulle dock bara gälla för ett mycket litet område i östra Sverige). Det vore opraktiskt att använda fyra olika koordinatsystem för de nationella databaserna och därför används endast en projektion för hela landet. Nackdelen med detta är att det innebär större geometriska distortioner (än om flera projektioner använts); områden som ligger långt ifrån medelmeridianen får helt enkelt ett större geometriskt fel (jfr hur gradnätet deformeras i Figur 3.10). För SWEREF 99 TM blir skalfelen som störst i Haparandatrakten där de uppgår till omkring 1,5 %, dvs. skalfelet är omkring 1,5 millimeter per meter. Detta skalfel kan accepteras för nationella kartdatabaser, men är för stort för noggrann geodetisk mätning och storskaliga tillämpningar (t.ex. kommunala baskartor). Därför rekommenderas att man använder en lokal kartprojektion för sådana tillämpningar.

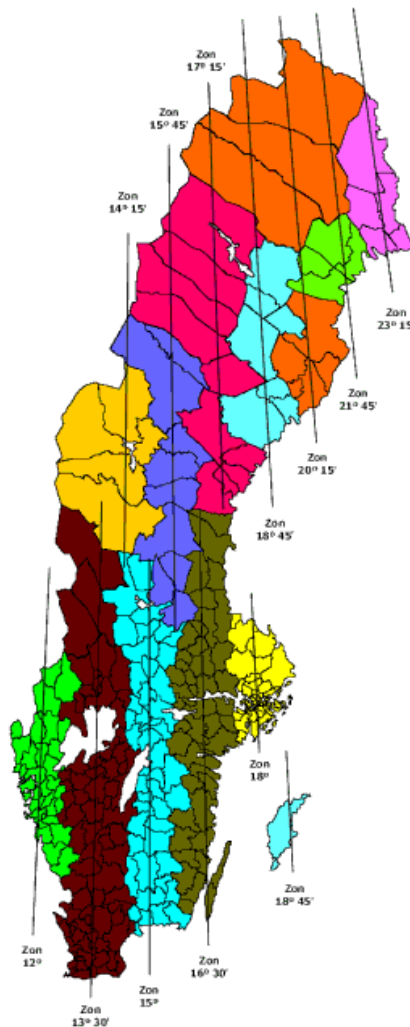
4.2.4 SWEREF 99 med lokala kartprojektioner

För att minimera den geometriska distortionerna (förvrängningarna) i den transversala Mercator-projektionen indelas Sverige i ett antal nord-sydligt orienterade projektionszoner. Av praktiska skäl måste zongränserna anpassas till kommungränserna. I Figur 4.5 redovisas zonindelningen och respektive medelmeridian. Till exempel gäller att koordinatsystemet SWEREF 99 13 30 har en medelmeridian på $13^{\circ} 30'$. Följande kartprojektionsparametrar används i samtliga zoner:

- Förstoringsfaktorn är 1,0.
- N -tillägg är 0 m.
- E -tillägg är 150 000 m.

Att förstoringsfaktorn är noll innebär att de lokala projektionerna är längdriktiga längs medelmeridianen, vilket inte är fallet för SWEREF 99 TM. Att E -tillägget är annorlunda än för SWEREF 99 TM, har den praktiska fördelen att man enkelt kan se på koordinaterna om en lokal projektion eller TM använts. (Men man bör ändå alltid ange vilket referenssystem och kartprojektion som används för en lista med koordinater, etc.)

SWEREF 99 med lokal kartprojektion används ofta av kommuner både i deras mätverksamhet och för de storskaliga kommunala kartorna t.ex. baskartorna som ligger till grund för den kommunala stadsplaneringen.

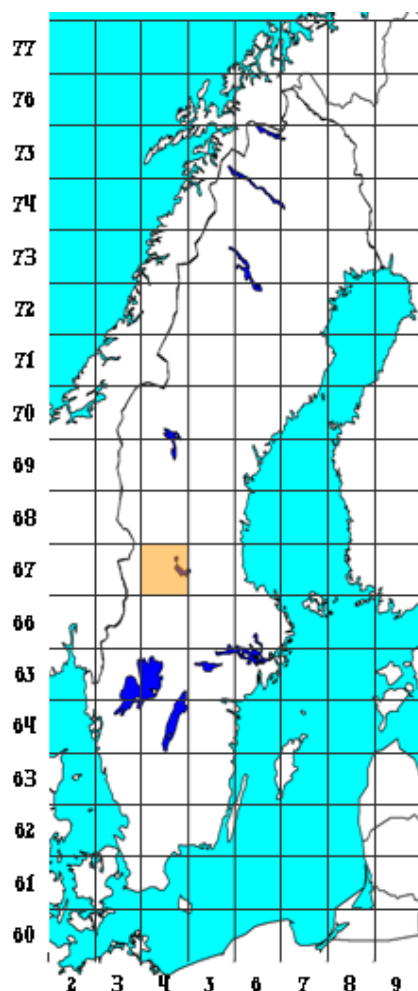


Figur 4.5. Zonindelning för SWEREF 99 med lokala kartprojektioner. Källa: Lantmäteriet

4.2.5 Indexsystem för SWEREF 99 TM

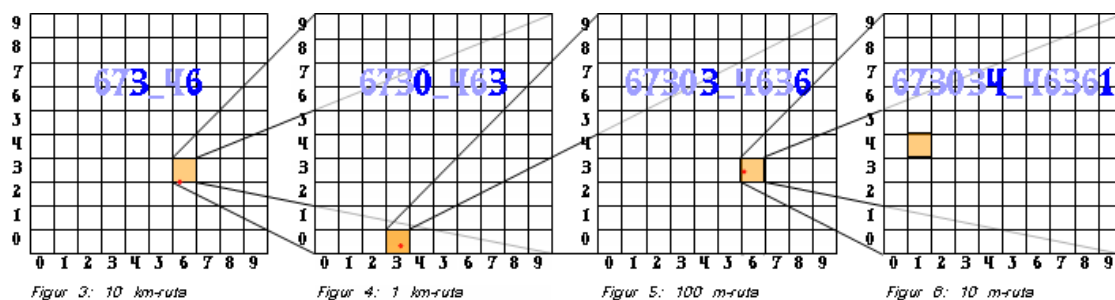
Ett *indexsystem* syftar till att skapa ett reguljärt rutnät där varje ruta har en unik beteckning. Detta rutnät ligger sedan till grund för t.ex. tryckning av kartor, benämning av ortofoton, och presentation av statistiska data (om befolkning etc.). Exempelvis kan man köpa statistik från SCB där den geografiska indelningen baserar sig på indexsystemet för SWEREF 99 TM.

SWEREF 99 TM har indexsystem för rutor i variabel storlek med sidlängderna 100 km, 10 km, 1 km, 100 m, 10 m och ända ner till 1 m. Indelningen utgår från en punkt med koordinaterna $N = 6\,000\,000$ m och $E = 200\,000$ m, se t.ex. Figur 4.6 som visar rutindelningen för rutor med storleken 100 km \times 100 km. Utifrån dessa stora rutor kan man definiera allt mindre rutor, exempelvis att varje 100 km-ruta indelas i 100 stycken 10 km-rutor (Figur 4.7).



Figur 4.6. 100 km x 100 km indexrutor. Källa: Lantmäteriet

Rutorna betecknas med koordinatvärdena för det sydvästra hörnet, numeriskt trunkerade till det antal värdesiffror som krävs för respektive rutstorlek (Figur 4.7). Vi får således en sifferserie med ett udda antal siffror, varav koordinaten i nord-sydlig riktning (N) skall anges först och alltid innehålla en siffra mer än koordinaten i öst-västlig riktning (E). Komponenterna skiljs åt med ett understrykningstecken. Exempel på beteckningar ges i Tabell 4.1.



Figur 4.7. Beteckningssystem för indexrutor. Källa: Lantmäteriet

Tabell 4.1. Exempel på beteckningar för indexrutor (gäller för punkten markerad i Figur 4.6 och Figur 4.7). 100 km x 100 km indexrutan i Figur 4.6 har koordinaterna $N=6\,700\,000$, $E=400\,000$ för sitt sydvästra hörn. Dessa koordinatvärden trunckeras till 67 respektive 4 och beteckningen blir således 67_4. På samma sätt skapas beteckningarna för de mindre indexrutorna i Figur 4.7. Källa: Lantmäteriet.

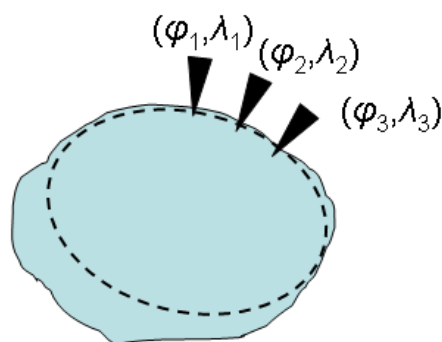
Indexruta	Beteckning
100 km	67_4
10 km	673_46
1 km	6730_463
100 m	67303_4636
10 m	673034_46361
1 m	6730345_463612

4.3 Plana regionala referenssystem

De globala tredimensionella referenssystemen, som t.ex. SWEREF 99, kräver modern satellitsteknik för att etableras. Innan denna teknik fanns tillgänglig separerades alltid de geodetiska referenssystemen i plan och höjd. I detta avsnitt beskrivs de viktigaste plana referenssystemen.

De plana regionala referenssystemen baseras främst på terrestra mätningar, dvs. mätningar utförda på jordytan (kompletterade med ett fåtal astronomiska observationer mot stjärnor). För de allra äldsta referenssystemen användes främst vinkelmätningar, men sedan den elektromagnetiska längdmätaren (EDM-instrumentet) utvecklats på 1950-talet (avsnitt 5.2) kom också sådana instrument att spela en viktig roll vid etablering av nationella referenssystem i plan.

Utan tillgång till modern mätningsteknik är det inte praktiskt möjligt att få till en global anpassning av jordellipsoiden till geoiden. På den tiden var detta emellertid inte något större problem. När man etablerade de nationella plana systemen var man framförallt intresserad av att få en god överensstämmelse mellan jordellipsoiden och geoiden för det egna landet. Resultatet blev att man gjorde en regional anpassning av jordellipsoiden (Figur 4.8).



Figur 4.8. Jordellipsoiden (streckad) är placerad så att den bra approximerar geoiden inom en region, s.k. regional anpassning. Ellipsoidens placering fixeras med hjälp av referenspunkter med kända koordinater (här markerade med trianglar).

Ett problem med den regionala anpassningen är att jordellipsoidens läge är annorlunda än för den globala anpassningen. Eftersom de geografiska koordinaterna är definierade utifrån jordellipsoiden, erhålls helt skilda latitud- och longitudvärden för ett globalt system och ett regionalt system; skillnaderna kan motsvara flera hundra meter. Det är alltså viktigt att ange vilket referenssystem som används när man uttrycker en koordinat oavsett vilket koordinatsystem som används.

4.3.1 RT 90

Det geodetiska referenssystem som användes för den allmänna kartläggningen av Sverige fram till 2006 var RT 90 (Rikets Triangelnät 1990); efter det har SWEREF 99 övertagit den rollen. RT 90 är ett plant regionalt referenssystem som baseras på tredje rikstrianguleringen (1967-1982) och en del äldre mätningar. Under denna tredje rikstriangulering gjordes framförallt ca 15 000 längdmätningar med EDM-instrument, men även en mindre del vinkelmätningar och enstaka astronomiska observationer. Mätningarna utfördes från ca 3 800 punkter; dessa punkter, som ofta benämns triangelpunkter, är belägna uppe på kullar och berg för att få bra sikt mellan dem. Beräkningen resulterade i geografiska koordinater på jordellipsoiden Bessels 1841 (Tabell 2.1). Anpassningen av Bessel var regional (Figur 4.8), vilket gör att skillnaderna mellan latitud- och longitudvärden uppgår till flera hundra meter mellan RT 90 och SWEREF 99.

RT 90 använder som standard den transversala Mercator-projektionen. Det koordinatsystem som därmed skapas benämns RT 90 2,5 gon V (väst). Men även om kartprojektionen är densamma för SWEREF 99 TM och RT 90 2,5 gon V, skiljer de sig åt genom vilka kartprojektionsparametrar de använder. RT 90 2,5 gon V använder följande värden:

- medelmeridian är $15^{\circ}48'29'',8$ öster om Greenwich (= 2,5 gon väst om Stockholms gamla observatorium),
- förstoringfaktor är 1,0,
- N -tillägg: 0 m och
- E -tillägg: 1 500 000 m.

Observera att gon är ett vinkelmått där ett varv är lika med 400 gon (=360°), som används som standard vid geodetisk mätning av vinklar i Sverige (se avsnitt 5.1).

En egenhet med RT 90 2,5 gon V (såväl som med en del andra geodetiska referenssystem) är att det benämner axeln i nordlig riktning för x -axeln och i östlig riktning för y -axeln; dvs. man har en omvänd definition av axlarna än vad man har inom

matematiken.

RT 90 2,5 gon V har populärt kallats för *rikets nät*. En sådan beteckning bör dock generellt undvikas. Om man idag använder begreppet rikets nät är det inte uppenbart om man menar detta äldre system eller det nyare SWEREF 99 TM.

Det finns ett indexsystem för RT 90 2,5 gon V liknande det indexsystem som finns för SWEREF 99 TM (avsnitt 4.2.5). Detta indexsystem används fortfarande för vissa tillämpningar. Sett ur en statistikers synvinkel är byte av indexsystem problematiskt eftersom det bryter långa serier i tiden av statistiska data (t.ex. om man t.ex. vill studera befolkningsförändringar är det bäst att använda samma indexsystem under hela den studerade tidsperioden).

4.3.2 Kommunala referenssystem

Idag använder alla kommuner SWEREF 99 med den föreskriven lokal kartprojektion (avsnitt 4.2.4) för sin mättningsverksamhet och i sina baskartor. Det finns dock fortfarande kvar en del geografisk information i äldre kartor och register samt i arkiv som är baserad på äldre kommunala referenssystem. Dessa äldre kommunala referenssystem är ofta baserade på nationella plana referenssystem (t.ex. RT 90 eller dess föregångare RT 38) eller regionala plana referenssystem, men vissa av dem hade en så bristfällig anslutning till ett väldefinierat nationellt eller regionalt system att de måste betraktas som helt lokala. Den kartprojektion som används är vanligen transversal Mercator med medelmeridianerna i förhållande till Stockholms gamla observatorium. Vanliga beteckningar är här t.ex.: 5 gon V eller 2,5 gon O (öst). Även vad det gäller *E*- och *N*-tillägg är variationerna stora. Här har flera kommuner gjort sådana tillägg/avdrag så att de får små numeriska värden på sina koordinater. De äldre kommunala geodetiska referenssystem har således varierande bakgrund och definitioner vilket gör att man ska hantera äldre kommunala koordinatvärden med stor försiktighet. Frågor man bör ställa sig är: (1) vilket nationellt (eller regionalt) geodetiskt referenssystem har använts, (2) vilka kartprojektionsparametrar har tillämpats, och (3) vilken kvalitet har koordinatvärdena?

4.4 Höjdsystem

4.4.1 Definition av geodetiska höjdsystem

Det finns framförallt två olika typer av höjd, nämligen höjd över geoiden och höjd över ellipsoiden (avsnitt 2.4). Höjd över ellipsoiden används främst som en ingående del i tredimensionella geodetiska referenssystem (avsnitt 4.2) och är vanligtvis bara steg på vägen mot en höjd över geoiden. När höjdinformation presenteras i en karta eller lagras i en geografisk databas används nästan uteslutande höjd över geoiden, som inte sällan kallas bara höjd över havet.

Ett geodetiskt höjdsystem är ett en-dimensionellt referenssystem för höjd över geoiden (antingen ortometriska höjder eller normalhöjder, jfr avsnitt 2.4.2). Geoiden är den ekvipotentialyta i tyngdkraftsfältet som bäst sammanfaller med havsytans medelnivå (Figur 2.12). För att definiera ett höjdsystem behöver vi alltså fastställa vilken ekvipotentialyta som ska räknas som geoiden; detta brukar kallas för att man bestämmer nollnivån för höjdsystemet.

För ett traditionellt geodetiskt höjdsystem läggs nollnivån fast genom att man mäter havsytans medelnivå med hjälp av *vattenståndsmätare* eller *mareografer* (lite förenklat består en mareograf av en stående linjal som går ned i vattnet och på vilken man

Kapitel 4: Geodetiska referenssystem

kontinuerligt läser av havsytans nivå). Eftersom havsytans medelnivå varierar rumsligt relativt geoiden, på grund av t.ex. havsströmmar och salthalt, behöver man vanligen använda flera mareografer för att få en så representativ nollnivå för höjdsystemet som möjligt över ett land en eller en region (man vill som regel att havsytan ska ligga så nära noll som möjligt).

Varje nationellt höjdsystem måste ha en väl definierad nollnivå. Det vore naturligtvis fördelaktigt om alla länder kunde använda samma nollnivå; i annat fall kommer inte höjdvärdena att vara jämförbara mellan länderna. För ett traditionellt geodetiskt höjdsystem är detta dock inte möjligt eftersom havsytans medelnivå varierar i rummet (i förhållande till geoiden), men länder som angränsar till varandra (på land) kan ändå alltid välja att anta en gemensam nollnivå. Sverige använder, liksom flera andra europeiska länder, en nollnivå som benämns *Normaal Amsterdams Peil* (NAP). NAP baserar sig på mareografmätningar i Amsterdam från 1683-1684, men trots åldern på observationerna fungerar NAP:s nollnivå tillräckligt bra längs Europas kuster. NAP är även den konventionella nollnivån för de gemensamma europeiska höjdsystemen, t.ex. för EVRF 2019.

En komplikation är att havsytans medelnivå förändras även med tiden i förhållande till land. I Sverige sker denna förändring snabbt på grund av *landhöjningen* (Figur 2.14). För att slippa att ständigt räkna om höjdvärdena till aktuella förhållanden, relaterar man höjdsystemet till förhållandena vid en viss referenstidpunkt som kallas för *landhöjningsepoken* för höjdsystemet.

Ett höjdsystem realiserar med hjälp av ett höjdnät som består av ett stort antal referenspunkter som är fysiskt markerade på marken och som har fastlagda höjder över geoiden. Dessa punkter kallas ofta *höjdfixar*. Mätningar av höjdskillnader utförs mellan referenspunkterna med hjälp av *avvägning* (se avsnitt 5.4 och 6.3). När man etablerar ett nytt nationellt höjdsystem används en noggrann form av avvägning benämnd *precisionsavvägning*. Till dessa mätningar måste man påföra korrekationer för bland annat jordkrökning och temperaturutvidgning av avvägningsstången. Dessutom måste man korrigerar för solens och månens dragningskraft genom s.k. tidjordskorrektion m.m.

Det har funnits ett antal höjdsystem i Sverige. Varje höjdsystem har burits upp av ett nät av referenspunkter (höjdfixar). I nästa avsnitt beskrivs det nyaste av dessa system, RH 2000, och i det efterföljande avsnittet ett par av de äldre systemen.

4.4.2 RH 2000

Under 2005 introducerade Lantmäteriet det nya nationella höjdsystemet RH 2000 i Sverige. Detta system används idag inom statlig verksamhet och av (så gott som) alla kommuner samt andra aktörer.

RH 2000 är huvudsakligen baserat på mätningar utförda 1979-2003 med s.k. *motoriserad avvägningsteknik*; dessa mätningar benämns tredje precisionsavvägningen (Figur 4.9 vänster). Vid motoriserad avvägning står observatören på flaket på en bil (tillsammans med avvägningsinstrumentet) medan stångförarna kör med var sin bil på vilka avvägningstångerna är fästa (Figur 4.9 höger).

RH 2000 definieras av ett nät innehållande ca 50 000 höjdfixar. Noggrannheten på dessa punkter är mycket hög (i tekniska termer: viktsenhetens standardosäkerhet blev efter utjämning ca $1 \text{ mm} / \sqrt{\text{km}}$, jfr kapitel 8). Nollnivån i det nya systemet definieras genom NAP. Höjderna är definierade som normalhöjder, dvs. höjder över kvasigeoiden (som

är i stort sett samma sak som höjder över geoiden). RH 2000 redovisar höjdförhållandena för år 2000.0 (landhöjningsepoken). Eftersom mätningarna i höjdnätet pågick under mer än 20 år reducerades alla mätningar till landhöjningsepoken med hjälp av en noggrann landhöjningsmodell (en modell av samma typ som den i Figur 2.14); reduktionen var nödvändig för att eliminera den skillnad i landhöjning i olika delar av landet som uppstod under den tid mätningarna pågick.



Figur 4.9. (Vänster) Slingor som används vid tredje riksavvägningen. (Höger) Motoriserad avvägning.
Källa: Lantmäteriet.

En viktig fråga är hur RH 2000 relaterar sig till europeiska höjdsystem, främst till det mest moderna europeiska höjdsystemet EVRF 2019 (European Vertical Reference Frame 2019). Både RH 2000 och EVRF 2019 följer de officiella riktlinjer som finns för hur höjdsystem ska vara definierade i Europa. Definitionen av EVRF 2019 är densamma som för RH 2000 (förutom att NAP-nollnivån realiserats aningen annorlunda), men det påverkar inte höjderna nämnvärt. De två höjdsystemen använder även samma landhöjningsepok i Sverige och Norden (2000.0). En skillnad är att de har beräknats med delvis olika mätdata; inom Sveriges gränser har emellertid exakt samma data utnyttjats. De resulterande höjdskillnaderna mellan systemen är dock mycket små, i medeltal ca 7 mm över Sverige (maximalt 19 mm). Detta gör att RH 2000 klarar kraven ställda från EU, och att vi kan använda RH 2000 för utbyte av höjdinformation med andra europeiska länder.

Det kan nämnas att länderna runt Östersjön håller på att byta till det geodetiska höjdsystemet BSCD2000 (*Baltic Sea Chart Datum 2000*) för sjökort och navigering i hela Östersjön. BSCD2000 definieras på samma sätt som RH 2000 (och EVRF 2019). På svenskt vatten sammanfaller BSCD2000 med RH 2000. Detta gör att aktuellt vattenstånd längs de svenska kusterna nu anges i relation till RH 2000 (och inte i förhållande till havsytans medelnivå, ”medelvattenståndet”, vilket tidigare användes).

4.4.3 RH 00, RH 70 och kommunala system

Det första rikstäckande höjdsystemet är Rikets höjdsystem 1900 (RH 00) som grundades på den första precisionsavvägningen utförd under åren 1886–1905. Nätet var mycket glest och förtätades sedan successivt. I många kommuner anlades också höjdnät

i början av 1900-talet, och flertalet av dessa anslöts till RH 00. Precis som i plan (avsnitt 4.3.2) anslöts vissa av de kommunala höjdsystemen på ett slarvigt vis (det var till exempel inte ovanligt att en och samma kommun hade olika ”RH 00-delar” vilka kunde skilja sig så mycket som en decimeter från varandra). På grund av landhöjningen kom RH 00-systemet med tiden förstås att deformeras. Detta ledde till att ett nytt höjdsystem, Rikets höjdsystem 1970 (RH 70), behövde etableras, vilket gjordes med den andra precisionsavvägningen 1951–1967.

RH 70 användes som höjdsystem i den allmänna kartläggningen (dvs. Lantmäteriets nationella kartor) fram tills RH 2000 infördes 2005. Det var dock få kommuner som anslöt sina höjdnät till RH 70. De kommuner som redan hade nät anslutna till RH 00 låg i allmänhet kvar i detta system. Endast vid etablering av helt nya kommunala nät från slutet av 1970-talet och framåt gjordes anslutning till RH 70. En viktig motivering för införandet av RH 2000 var att etablera ett tätt och kvalitativt bra höjdsystem för att skapa möjlighet att ansluta andra (t.ex. kommunala) höjdsystem med hög noggrannhet. Denna strategi blev lyckosam och (så gott som) alla kommuner har idag anslutit sig till RH 2000 och all kommunal verksamhet kan idag sägas ske i RH 2000.

På grund av landhöjningen är skillnaden mellan de olika nationella höjdsystemen stor. Skillnaden mellan RH 70 och RH 00 varierar mellan ca -4 cm i sydligaste Sverige och $+83$ cm i de norra landsdelarna. Skillnaden mellan RH 2000 och RH 70 varierar i sin tur mellan $+7$ cm och $+32$ cm.

4.5 Geoidmodeller

Geoidhöjden är det vertikala avståndet mellan jordellipsoiden och geoiden (Figur 2.12). Geoidhöjder används inom geodesin bl.a. för att konvertera mellan höjder över ellipsoiden och höjder över geoiden (jfr formel 2.12), vilket behövs för många olika tillämpningar, framförallt för höjdbestämmning med GNSS (GPS), men också till exempel för att kunna använda geoiden som referensyta vid geofysisk och oceanografisk modellering. Eftersom geoidhöjderna beror på tyngdkraftens variation, är de även en informationskälla om massfördelningen nere i jorden, vilket är av intresse för bl.a. olje- och gruvprospektering.

Geoidhöjder lagras i en *geoidmodell*. Denna modell är oftast ett rutnät av punkter (raster) med givna geoidhöjder samt en metod för interpolering mellan dessa punkter (interpolering är en teknik där värdet för en punkt bestäms med hjälp av kända värden för omkringliggande punkter). För att man ska kunna använda en geoidmodell för konvertering mellan höjder över ellipsoiden och höjder över geoiden (formel 2.12), behöver geoidmodellen anpassas både till läget av jordellipsoiden (dvs. till det tredimensionella geodetiska referenssystemet) och till hur det geodetiska höjdsystemet (för höjder över geoiden) är definierat. För det senare behövs t.ex. kunskap om vilken nollnivå och landhöjningsepok som använts för höjdsystemet ifråga.

Ett sätt att bestämma geoiden är att utnyttja tyngdkraftsdata, vilket resulterar i en gravimetrisk geoidmodell. Tyngdkraften kan mätas dels från specialdesignade satelliter, dels genom att göra terrestra mätningar med en gravimeter. Ett alternativt sätt att bestämma geoidhöjden är att utnyttja GNSS för att bestämma höjder över ellipsoiden, h , på punkter med avvägda höjder över geoiden, H , vilket ger geoidhöjder med hjälp av sambandet i formel 2.12. En geoidmodell som skapats på detta sätt benämns geometrisk. För att bestämma en geoidmodell anpassade till ett traditionellt geodetiskt höjdsystem (som t.ex. RH 2000) är det bäst att kombinera gravimetrisk och geometrisk geoidbestämning.

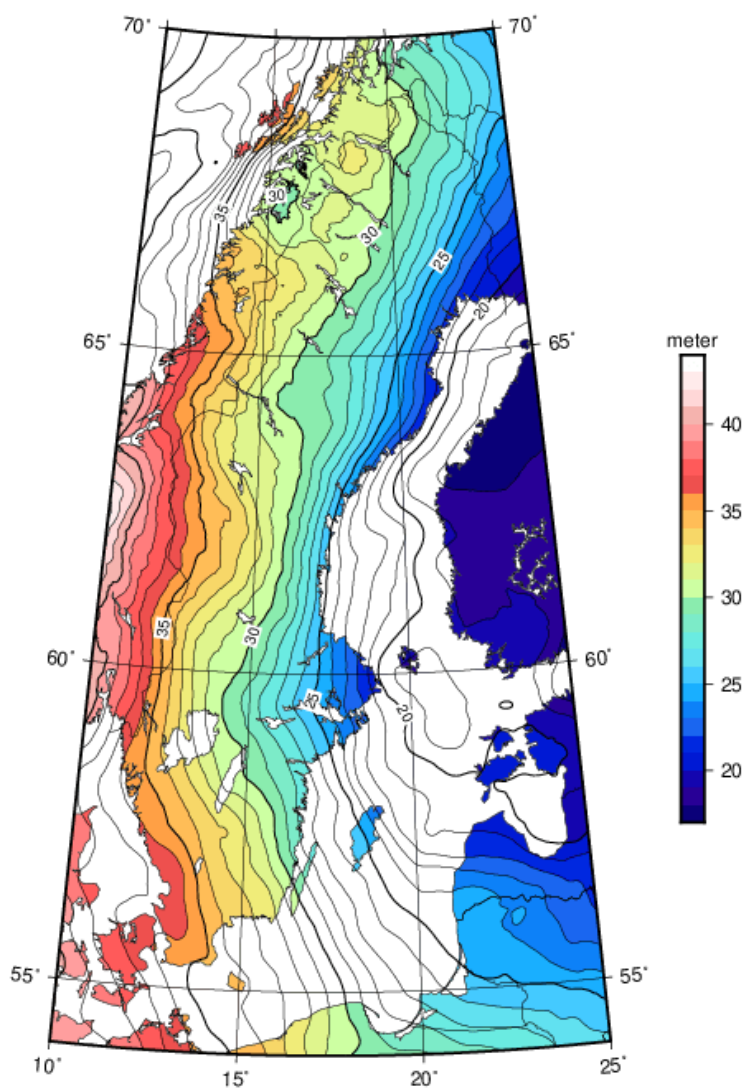
I Sverige har det funnits ett flertal olika geoidmodeller, alla kopplade till olika höjdsystem. Nedan nöjer vi oss med att presentera den mest aktuella geoidmodellen SWEN17_RH2000.

4.5.1 SWEN17_RH2000

Geoidmodellen SWEN17_RH2000 är framtagen för att konvertera mellan höjder över ellipsoiden i SWEREF 99 och höjder över geoiden i RH 2000 enligt:

$$H_{RH2000} = h_{SWEREF99} - N_{SWEN17_RH2000}$$

Den osäkerhet som finns i denna konvertering är omkring centimetern (på land). Detta är tillräckligt bra för många tillämpningar och möjliggör mätning av RH 2000 höjder med GNSS-teknik. Rent praktiskt kan detta göras genom att ladda ned geoidmodellen från Lantmäteriets webbsidor och importera den till sin GNSS-mottagare. Detta kräver dock att man har en GNSS-mottagare som kan hantera geoidkorrektioner. Vidare krävs att man utför GNSS-mätning på ett adekvat sätt för att uppnå den höga kvalitet som geoidmodellen möjliggör (se kapitel 10–0).



Figur 4.10. Geoidhöjder enligt SWEN17_RH2000. Källa: Lantmäteriet

Geoidhöjderna i SWEN17_RH2000 varierar mellan omkring +20 och +40 meter i Sverige. Dessa värden speglar skillnaden i höjd mellan den globalt anpassade jordellipsoiden (vilken används i SWEREF 99) och geoiden (definierat enligt RH 2000). Vi kan ur Figur 4.10 se en tydlig gradient där geoidhöjderna ökar i västlig riktning. Denna lutning beror på densitetsvariationer långt nere i jorden (i manteln).

SWEN17_RH2000 är en kombinerad gravimetrisk och geometrisk geoidmodell. Den är konstruerad genom att anpassa den nordiska geoidmodellen NKG2015 till de svenska referenssystemen SWEREF 99 och RH 2000, genom att utnyttja ca 200 geometriska geoidhöjder som bestämts genom mycket noggrann GNSS-mätning på RH 2000-höjdfixar.

4.5.2 Utblick: GNSS/geoid-baserade höjdsystem

I avsnitt 4.4 behandlade vi traditionella geodetiska höjdsystem, vilka i princip realiseras genom att man sätter nollnivån lika med havsytans medelnivå i ett antal mareografer (vattenståndsmätare) för landet eller regionen ifråga. Vi har redan tidigare nämnt (avsnitt 4.4.1) att ett problem med detta är att havsytans medelnivå varierar i förhållande till geoiden (ekvipotentialytorna) beroende på havsytans topografi som orsakas av framförallt havsströmmar och varierande salthalt. Som en konsekvens av detta kommer traditionella höjdsystem i olika delar av världen att avvika från varandra; de har olika nollnivåer och refererar till olika geoider (så att säga).

Utvecklingen går idag mot att etablera nya geodetiska höjdsystem med hjälp av GNSS-mätta höjder över ellipsoiden *och* geoidhöjder från en väldefinierad gravimetrisk geoidmodell (baserad på tyngdkraftsdata mätt på marken och från satellit). Höjden över geoiden ges då med hjälp av formel 2.12. Denna typ av höjdsystem har fördelen att höjdsystem runt hela jorden kommer att få samma nollnivå (detta kan idag realiseras med hög noggrannhet). En nackdel är att GNSS-mätning inte är lika noggrann som avvägning över korta avstånd, men detta kan man komma över genom att kombinera olika mätningstekniker vid etableringen av de GNSS/geoid-baserade höjdsystemen (avvägning kan alltså utnyttjas också här, över korta avstånd).

Kanada har nyligen introducerat ett GNSS/geoid-baserat höjdsystem och USA arbetar mot att göra samma sak redan 2022. Arbeta pågår även med att etablera ett internationellt världshöjdsystem som kommer att heta IHRF (International Terrestrial Reference Frame). Eftersom RH 2000 har sin nollnivå nära havsytans medelnivå i Sverige, vilket inte är fallet med IHRF, kommer RH 2000 fortsätta att användas i Sverige under många år. IHRF kommer framförallt att användas för globala tillämpningar.

4.6 Koordinattransformation

Inom mättningsverksamhet händer det ofta att man har koordinater i ett koordinatsystem, men man vill arbeta i ett annat koordinatsystem. För att lösa detta problem behöver man transformera (räkna om) koordinaterna från det ena systemet till det andra. Det finns två olika typer av *koordinattransformationer*:

- 1) Byte av koordinatsystem, där man inte ändrar det geodetiska referenssystemet.

Ett exempel på detta är när man har geocentriska koordinater i SWEREF 99, och vill beräkna *N*- och *E*-koordinater i SWEREF 99 TM. Denna typ av koordinattransformation är rent *analytisk*; det finns matematiska formler givna hur själva transformationen ska gå till. Denna typ av transformation benämns även *överräkning*.

2) Byte av koordinatsystem som inbegriper byte av referenssystem.

Ett exempel är när man transformerar koordinater i SWEREF 99 TM till RT 90 2,5 gon V. Denna typ av koordinatsystem innehåller ett *empiriskt* steg där själva övergången från ett referenssystem till ett annat sker. För att utföra detta empiriska steg behövs mätningar för att så bra som möjligt fastställa hur de olika referenssystemen förhåller sig till varandra. Dessa mätningar, som oftast har utförts av antingen Lantmäteriet eller en kommun, har sedan använts för att beräkna en transformation och ta fram rekommendationer för hur man ska gå tillväga. Men trots att Lantmäteriet eller kommunen ger färdiga formler att använda är detta ingen analytisk transformation eftersom formlerna är bestämda genom empiriska mätningar. Detta innebär också att det inte finns en sann transformationsformel (som det finns för analytiska fallet) utan alla empiriska transformationer är behäftade med osäkerhet.

Vi kommer i detta avsnitt börja med att beskriva den första kategorin av koordinattransformationer i avsnitt 5.6.1 för att därefter behandla den andra typen i 5.6.2–5.6.3. Vi koncentrerar oss på transformation av plana koordinater. Se avsnitt 2.4.4 och 4.5 för transformation mellan höjd över ellipsoiden och höjd över geoiden.

4.6.1 Analytisk transformation

Vi har tidigare i kompendiet kommit i kontakt med två vanliga former av analytiska transformationer inom mätningstekniken:

- transformation mellan geocentriskt kartesiskt koordinatsystem och ett geografiskt koordinatsystem (formel 2.6–2.8 och Exempel 2.2), och
- transformation mellan geografiska koordinater och kartprojektionskoordinater (exempel ges i formel 3.9 och som en del i Exempel 3.1).

Ytterligare en vanlig form av analytisk transformation är byte av kartprojektion. Ett exempel är att man har koordinater i SWEREF TM och vill räkna över dem till SWEREF 99 13 30 (dvs. SWEREF 99 med en lokal kartprojektion, se avsnitt 4.2.4). För att utföra denna transformation beräknas först geografiska koordinater i SWEREF 99 från SWEREF 99 TM, och därefter räknas koordinater i SWEREF 99 13 30 från de geografiska koordinaterna. Man ska alltså vara noggrann med att använda de sanna (analytiska) sambanden mellan kartprojektionskoordinaterna och de geografiska koordinaterna när man byter kartprojektion; det är generellt inte tillåtet att försöka hitta genvägar att gå direkt från *N*- och *E*-koordinater i en kartprojektion till motsvarande koordinater i en annan kartprojektion. Detta leder till att man helt i onödan introducerar kända geometriska skillnader mellan projektionerna som fel i data.

Kapitel 4: Geodetiska referenssystem

Exempel 4.1: Transformera en punkt i Smygehuk från SWEREF 99 TM till den lokala projektionen SWEREF 99 13 30 (jfr Figur 4.5).

Koordinater för punkten i SWEREF 99 TM är:

$$N_s = 6\,133\,521,11 \text{ m}, E_s = 395\,945,37 \text{ m}.$$

Lösning: Först beräknas de geografiska koordinaterna för punkten, vilket ger:

$$\text{Geografiska koordinater i SWEREF 99} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 13^\circ 21' 34'', 1603 \\ \varphi = 55^\circ 20' 13'', 2718 \end{array} \right\}$$

Därefter beräknas koordinater i SWEREF 99 13 30 utifrån de geografiska koordinaterna:

$$\text{Koordinater i SWEREF 99 13 30} = \left\{ \begin{array}{l} N = 6\,134\,758,60 \text{ m} \\ E = 141\,083,65 \text{ m} \end{array} \right\}$$

Svar: Koordinaterna för punkten i Smygehuk är i SWEREF 99 13 30 lika med

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 6\,134\,758,60 \text{ m} \\ E = 141\,083,65 \text{ m} \end{array} \right\}$$

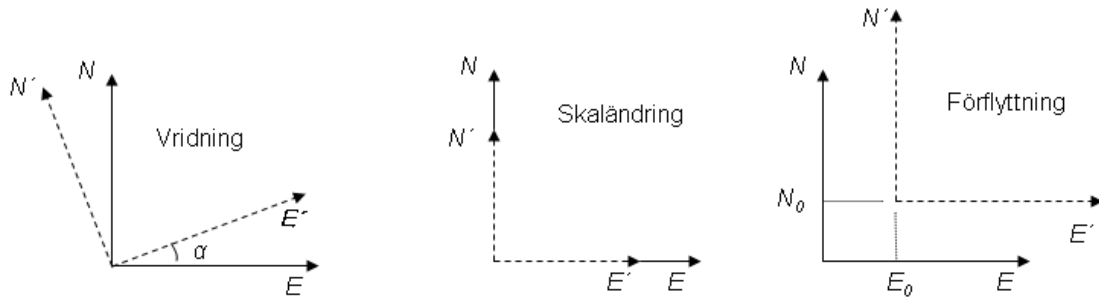
Kommentar till svar: Om man vill transformera koordinater för enskilda punkter mellan svenska koordinatsystem (som i detta exempel) är det lämpligt att använda den koordinattransformationsjänst som finns på Lantmäteriets webbsidor om geodesi.

4.6.2 Empirisk transformation i två dimensioner

För att klara av att byta referenssystem måste man skapa en relation mellan referenssystemen. Denna relation etableras genom att man mäter in ett antal punkter i bägge systemen och sedan skapar ett empiriskt samband mellan koordinatvärdena i de bägge systemen. Inom geodesi används oftast *likformig transformation* (s.k. *Helmertransform*) för detta syfte. Vi inleder därför med att beskriva likformig transformation för att senare övergå till hur man praktiskt tillämpar denna vid byte av referenssystem.

Tvådimensionell likformig transformation (Helmertransform)

I en likformig transformation modellerar man tre skillnader mellan koordinatsystemen, nämligen skillnad i vridning (rotation), skala och läge för origo (Figur 4.11). Den likformiga transformationen klarar alltså inte av att modellera olika skala i olika riktningar, eller att något av koordinatsystemen inte är rätvinkligt (det finns andra typer av empiriska transformationer som klarar detta, men de ska inte användas vid byte av geodetiskt referenssystem). Därför bevaras formen av ett objekt i den likformiga transformationen, vilket ju också namnet antyder.



Figur 4.11. Den likformiga transformationen modellerar följande skillnader mellan två koordinatsystem: skillnad i rotation (vridning), skala (skaländring) och läge för origo (förflyttning). Tillsammans kan dessa tre skillnader modellera ändringar i koordinatsystem liknande det i Figur 4.12.

Ponera att vi har en punkt P vars koordinater är kända i $N'E'$ -systemet. Dessa koordinater är i vektorform lika med $\begin{bmatrix} E'_P \\ N'_P \end{bmatrix}$. Det första vi gör är att vrida

koordinatsystemet. Detta görs genom att multiplicera koordinaterna med en tvådimensionell rotationsmatris \mathbf{R}_2 . I nästa steg gör vi en skaländring, där skalfaktorn är lika med m . Och slutligen genomförs en förflyttning genom att addera en vektor $\begin{bmatrix} E_0 \\ N_0 \end{bmatrix}$. Således blir transformationen i vektorform:

$$\begin{bmatrix} E_P \\ N_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ N_0 \end{bmatrix} + m\mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} E'_P \\ N'_P \end{bmatrix} \quad 4.1$$

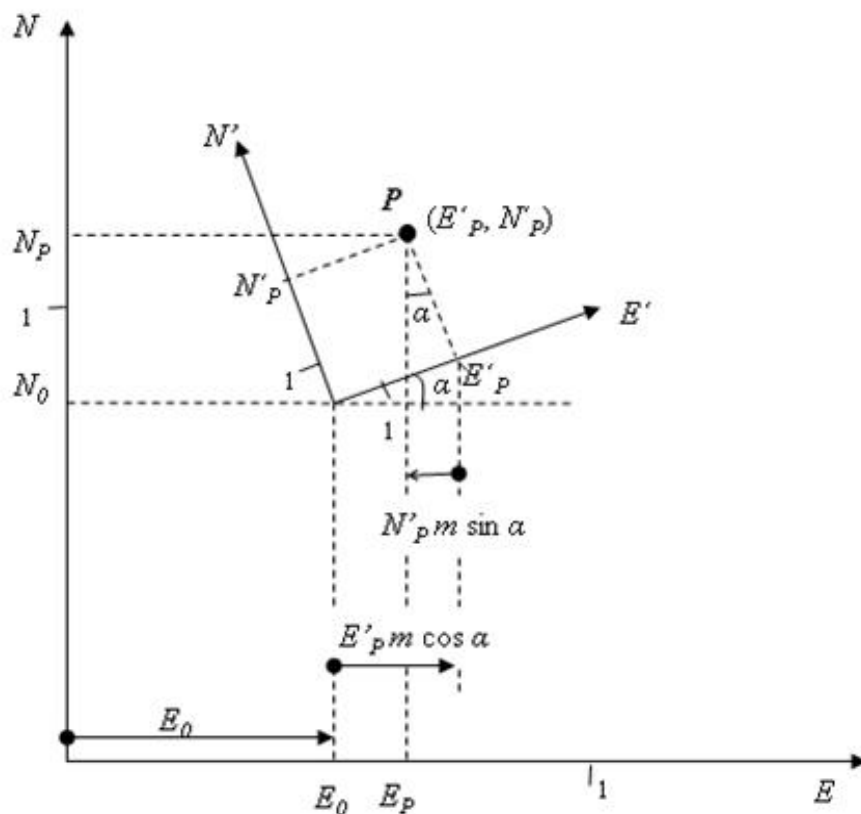
Rotationsmatrisen är en funktion av vridningen α och definieras som:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad 4.2$$

Om man använder uttrycket för rotationsmatrisen \mathbf{R}_2 i formel 4.1 erhålls följande samband:

$$\begin{aligned} E_P &= E_0 + E'_P \ m \ \cos \alpha - N'_P \ m \ \sin \alpha \\ N_P &= N_0 + E'_P \ m \ \sin \alpha + N'_P \ m \ \cos \alpha \end{aligned} \quad 4.3$$

Vi kan kontrollera riktigheten i denna formel genom att studera Figur 4.12. För att beräkna hur stort E_P är uttryckt i $N'E'$ -systemet måste vi studera tre komponenter (markerade med pilar i nedre delen av figuren). Storheten på dessa tre komponenter erhålls genom en trigonometrisk betraktelse (vilket är en bra övning att genomföra på egen hand). Om man summerar de tre komponenterna (och observerar att den tredje är negativ) så erhålls den övre raden i formel 4.3. På analogt vis kan man visa att även N_P -koordinaten blir korrekt.



Figur 4.12. Tvådimensionell likformig transformation.

I härledningen av transformationssambandet har konventionen att vinklar i moturs riktning är positiva. Detta är den vanligaste konventionen inom matematik och de flesta tillämpningsområden. Dock använder man inom geodetisk mätningsteknik ofta konventionen att vinklarna i medurs riktning är positiva. Används denna konvention kommer en del tecknen i formel 4.2 och 4.3 att ändras.

Exempel 4.2: Transformera nedanstående koordinater för punkten P :

$$N'_p = 90,00 \text{ m}$$

$$E'_p = 100,00 \text{ m}$$

till N, E -systemet. Relationen mellan systemen beskrivs med en tvådimensionell likformighetstransformation. Ur en tabell fås följande värden på transformationsparametrarna:

$$E_0 = 1253,62 \text{ m}$$

$$N_0 = 457,34 \text{ m}$$

$$m = 1,0012 \text{ dimensionslös}$$

$$\alpha = 0,0732 \text{ grader}$$

Lösning: Transformationen utförs med hjälp av tvådimensionell likformighetstransformation (formel 4.3). Vid tillämpning av formeln görs en kontroll att enheterna är korrekta. Framförallt kollas att enheterna för alla koordinatangivelser är angivna i meter, samt att vinkeln anges i rätt typ av vinkelmått (i förhållande till den

programvara som används). Gör detta erhålls följande:

$$\begin{aligned} E_p &= E_0 + E'_p \cdot m \cdot \cos \alpha - N'_p \cdot m \cdot \sin \alpha = \\ &= 1253,62 + 100,00 \cdot 1,0012 \cdot \cos(0,0732^\circ) - 90,00 \cdot 1,0012 \cdot \sin(0,0732^\circ) = \\ &= 1353,6248 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_p &= N_0 + E'_p \cdot m \cdot \sin \alpha + N'_p \cdot m \cdot \cos \alpha = \\ &= 457,34 + 100,00 \cdot 1,0012 \cdot \sin(0,0732^\circ) + 90,00 \cdot 1,0012 \cdot \cos(0,0732^\circ) = \\ &= 547,5758 \text{ m} \end{aligned}$$

Svar: Koordinaterna för punkten P i N, E -systemet är: $\begin{cases} N_p = 547,58 \text{ m.} \\ E_p = 1353,62 \text{ m} \end{cases}$

Bestämning av parametrarna i en likformig transformation

Likformig transformation kan som sagt användas för att modellera transformationer mellan olika geodetiska referenssystem. Vi inleder med ett exempel på hur detta görs i två dimensioner, vilket kan vara aktuellt om man vill passa in ett äldre kommunalt referenssystem (i form av ett nät med punkter) på Sweref 99. Det första man gör är att mäta in ett antal punkter i bägge systemen. Punkterna bör vara jämt utspridda och täcka hela det området man jobbar inom. När koordinater beräknats ur mätningarna känner man till E - och N -koordinater för bägge systemen. I nästa steg måste man se till att koordinatsystemen använder samma kartprojektion. Om de inte gör det måste man byta kartprojektion på ett av systemen (jfr Exempel 4.1). Efter detta steg har man alltså E - och N -koordinater för bägge systemen och bägge koordinatsystemen använder samma kartprojektion. För att slutligen skapa själva transformations sambandet används formel 4.3. Man stoppar då in kända E - och N -koordinater för alla punkterna. Det som då erhålls är ett överbestämt icke-linjärt ekvationssystem där de obekanta är E_0 , N_0 , m och α (i realiteten används en variabelsubstitution, men vi bortser från denna teknikalitet här). Ekvationssystem löses genom att iterativt tillämpa minsta-kvadratmetoden (kapitel 9).

Som användare av ett transformations samband behöver man inte kunna alla detaljer om hur sambandet har etablerats. Det är vanligtvis stat, kommun eller liknande organisation som etablerar samband mellan geodetiska referenssystem. Dessa samband publiceras som parametrar för den likformiga transformationen och kan användas på det sätt som beskrivs i nästa avsnitt. När det är fråga om en empirisk transformation mellan två olika referenssystem, är det viktigt att känna till att en sådan transformation alltid är behäftat med en osäkerhet. Den som tagit fram transformationen bör redovisa hur stor denna osäkerhet är och det är viktigt att man som användare tar till sig denna information.

Transformation mellan två plana koordinatsystem

Transformation från ett nationellt plant system (här exemplifierat med RT 90 2,5 gon V) till ett plant kommunalt system (här exemplifierat med ett lokalt system med projektionen 5 gon V) görs genom följande process:

$$\begin{bmatrix} E \\ N \end{bmatrix}_{RT90_{2,5\text{gonVäst}}} \quad (1) \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}_{RT90} \quad (2) \rightarrow \begin{bmatrix} E \\ N \end{bmatrix}_{RT90_{5\text{gonVäst}}} \quad (3) \rightarrow \begin{bmatrix} E \\ N \end{bmatrix}_{KommunaltSystem_{5\text{gonVäst}}} \quad 4.4$$

Kapitel 4: Geodetiska referenssystem

Processen byggs upp av de tre transformationsstegen:

- 1) Analytisk transformation från kartprojektionskoordinater till geografiska koordinater (båda i RT 90).
- 2) Analytisk transformation från geografiska koordinater till kartprojektionskoordinater (båda i RT 90). Efter denna transformation har RT 90 fått ett nytt koordinatsystem med samma kartprojektion och kartprojektionsparametrar som det kommunala systemet.
- 3) Empirisk transformation från RT 90 till det kommunala systemet (där båda projektionerna har samma medelmeridian 5 gon V). Denna transformation utförs genom att tillämpa en likformig transformation (formel 4.3) där transformationsparametrarna har bestämts av Lantmäteriet/kommunen (jfr Exempel 4.2).

För att genomföra denna process på ett korrekt sätt är det viktigt att veta hur transformationsparametrarna ska användas, t.ex. vilken kartprojektion som parametrarna är framtagna för.

Det går även att genomföra den empiriska transformationen mellan geodetiska referenssystem utan att använda likformighetstranformation. Man kan genom att specialdesigna kartprojektionsparametrarna i transversala Mercator-projektionen gå direkt från $[\lambda, \phi]_{RT90}$ till $[E, N]_{\substack{\text{KommunaltSystem} \\ 5\text{gonVäst}}}$; detta tillvägagångssätt benämns

direktprojektion. För att möjliggöra detta publiceras speciella parametrar för Mercator-projektionen; genom att använda dessa parametrar utförs ett byte av referenssystem. Att på detta sätt transformera direkt till ett referenssystem genom att alternera kartprojektionsparametrarna har visat sig fungera bra rent praktiskt och i många fall baseras den officiella transformationen mellan kommunala system och nationella system på detta tillvägagångssätt.

4.6.3 Empiriska transformationer i tre dimensioner

Tredimensionell likformig transformation (Helmerttransformation)

Den tredimensionella likformiga transformationen har samma egenskaper som den tvådimensionella i den meningen att den tillåter vridning, skaländring och förflyttning. Och i matrisform blir uttrycken liknande:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + m\mathbf{R}_3(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \begin{bmatrix} X'_p \\ Y'_p \\ Z'_p \end{bmatrix} \quad 4.5$$

Skillnaden ligger främst i att rotationsmatrisen blir mycket mer komplicerad och vi kommer inte att specificera den i detalj här. Vad vi måste känna till är dock att den tredimensionella rotationsmatrisen är en funktion av tre vridningar i 3D-rummet, ω_x , ω_y och ω_z (vridning runt respektive koordinataxel).

För att etablera ett samband mellan två tredimensionella system (i geocentriska kartesiska koordinater) är tillvägagångssättet likadant som för två dimensioner. Skillnaden är att punkterna mäts in i tre dimensioner (X , Y , Z) och att den tredimensionella likformighetstranformationen används (formel 4.5).

Transformation mellan två tredimensionella koordinatsystem

I många tillämpningar, inte minst när man jobbar i internationella sammanhang, behöver man transformera mellan två tredimensionella koordinatsystem. Inom Europa är det vanligt att man måste konvertera från ett äldre nationellt referenssystem till en nationell realisering av ETRS89. Om man använder geografiska koordinater görs då följande steg:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \varphi \\ h \end{bmatrix}_{\text{ÄldreNationelltSystem}} \quad (1) \rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ÄldreNationelltSystem}} \quad (2) \rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{ETRS89}} \quad (3) \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda \\ \varphi \\ h \end{bmatrix}_{\text{ETRS89}} \quad 4.6$$

Processen byggs upp av de tre transformationsstegen:

- 1) Analytisk transformation från geografiska koordinater till geocentriskt kartesiska koordinater (formel 2.6).
- 2) Empirisk transformation från det äldre nationella systemet till ETRS89. Här används formel 4.5. För att utföra detta steg krävs kännedom om transformationsparametrarna X_0 , Y_0 , Z_0 , m , ω_x , ω_y och ω_z . Värden på dessa parametrar erhålls från nationella kartverk eller från andra pålitliga sammanställningar (se t.ex. <http://www.epsg-registry.org/>).
- 3) Analytisk transformation från geocentriskt kartesiska koordinater till geografiska koordinater (formel 2.8).

I flera fall måste man dessutom komplettera beräkningsgången i formel 4.6 med kartprojektionstransformationer.

4.6.4 Transformation mellan RT 90 2,5 gon V och SWEREF 99 TM.

En vanlig transformation är mellan RT 90 2,5 gon V och SWEREF 99 TM. Denna transformation skulle gå att genomföra med ett förfarande likt det som ges i beräkningsgång 5.7 om man adderar steg för att transformera mellan kartprojektionskoordinater (E - och N -koordinater) och de geografiska koordinaterna. I vissa fall måste man även addera steg för transformation av höjdkoordinater.

Det officiella sättet att transformera mellan de två nationella koordinatsystemen är dock att använda en direktprojektion. Denna direktprojektion beskrivs av följande beräkningsgång:

$$\begin{bmatrix} E \\ N \end{bmatrix}_{\text{RT90}_{2,5\text{gonVäst}}} \quad (1) \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda \\ \varphi \end{bmatrix}_{\text{SWEREF99}} \quad (2) \rightarrow \begin{bmatrix} E \\ N \end{bmatrix}_{\text{SWEREF99TM}} \quad 4.7$$

bestående av transformationsstegen:

- 1) Empirisk transformation där kartprojektionsparametrarna för transversal Mercatorprojektion är anpassade på sådant sätt att byte av referenssystem sker. Värden på dessa kartprojektionsparametrar kan fås t.ex. från Lantmäteriets webbsidor.
- 2) Övergång från geografiska koordinater till kartprojektionskoordinater (analytisk transformation); se avsnitt 3.4.3.

Liksom i alla empiriska transformationer finns det brister i 4.7. Lantmäteriet redovisar att finns en osäkerhet omkring decimetern i denna transformation. Felen varierar dock på olika systematiska vis över landet och man kan genom att använda

Kapitel 4: Geodetiska referenssystem

restfelsinterpolation till stor del reducera osäkerheten i transformationen.

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021.

Tack: Detta kapitel är till stora delar en sammanställning av informationsmaterial och kompendier från geodesienheten, Lantmäteriet, där både figurer och textavsnitt lånats. Tack till Lars Engberg, Mikael Lilje och övriga för att detta material fick användas. Ett speciellt tack till Bo-Gunnar Reit för dina förklaringar av referenssystem, och till Lars Engberg och Clas-Göran Persson för bra synpunkter på texten. Tack också till Hanna Stigmar för korrekturläsning. /Lars Harrie och Jonas Ågren

Lästips: Information om de svenska geodetiska referenssystemen finns framförallt på Lantmäteriets webbsidor om geodesi. Där finns både rapporter och informationsblad tillgängliga för gratis nedladdning.

5 Mätinstrument

I detta kapitel kommer vi att gå igenom de vanligaste traditionella instrumenten och deras handhavande inom den terrestra (markbundna) mätningstekniken. De storheter som ska mätas upp är horisontalriktningar (eller horisontalvinklar), vertikalvinklar, längder och höjd-skillnader. Det är viktigt att instrument och all annan utrustning är väl kontrollerade inför alla typer av mätuppdrag och därför innehåller detta kapitel även delar för kontroll och justering av teodoliter, EDM-instrument och avvägning-instrument.

Instrument för satellitmätning behandlas i kapitel 10.

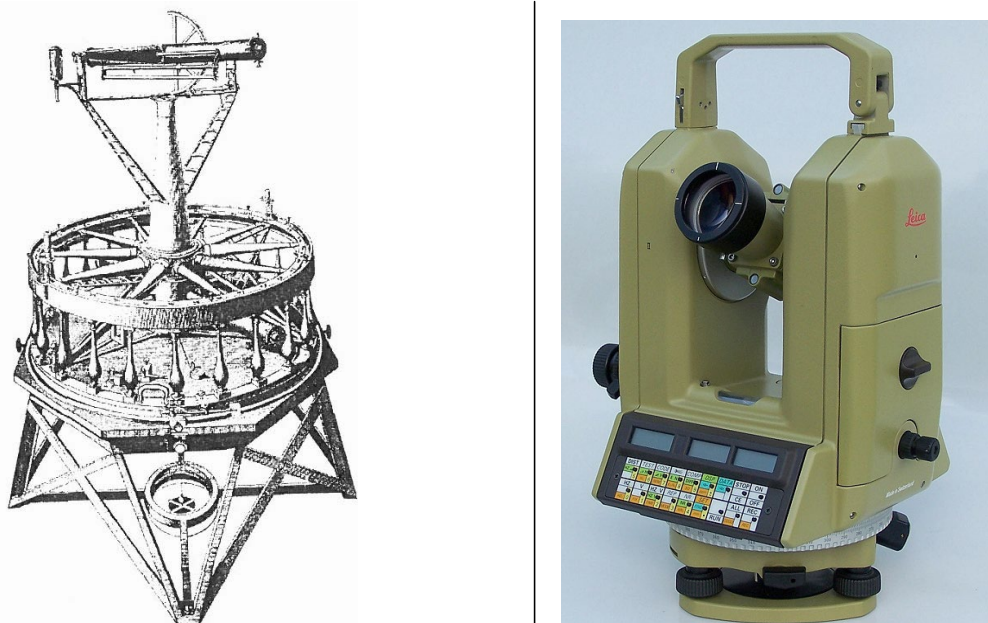
5.1 Vinkelmätning-instrument

Vinkelmätning är en mycket vanlig mätoperation inom mätningstekniken och sättet att göra den på varierar beroende på ändamålet med mätningen. Enkel horisontalvinkelmätning kan t.ex. göras med en kompass. Man syftar då på det eller de objekt som ska mätas och avläsning görs direkt på kompasshusets skala. Referens- eller utgångsriktning kan här vara nordriktningen. Ett mycket noggrannare instrument för vinkelmätning är *teodoliten*.

5.1.1 Teodoliten

Denna instrumenttyp började tillverkas i slutet av 1700-talet och möjliggjorde noggrannare vinkelmätningar än vad man tidigare kunnat utföra. I Figur 5.1 kan vi se två teodoliter, dels en från slutet av 1700-talet som är gjord av den berömde instrumentmakaren Jesse Ramsden och som användes vid den första noggranna triangelmätningen över England, dels en elektronisk teodolit (jfr avsnitt 5.3.1),

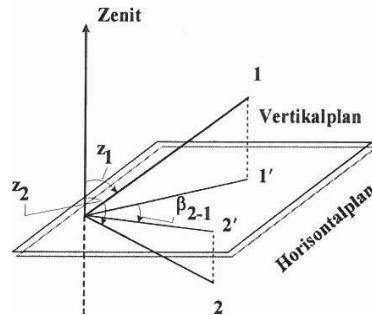
I bl.a. Sverige används företrädesvis instrument som visar värden i vinkelenheten gon ($360^\circ = 400$ gon).



Figur 5.1. Jesse Ramsdens teodolit från 1787 (t.v.) och en elektronisk teodolit, Leica T2002 (t.h.).

Vid mätning monteras teodoliten på stativ eller mätpelare och horisonteras med hjälp

av ett vattenpass. Sedan kan den användas för uppmätning av vinklar i det tredimensionella rummet. I princip kan man tänka sig att denna vinkelmätning skulle kunna utföras som en direkt mätning av rymdvinkeln mellan två objekt, men på grund av praktiska problem med att konstruera ett sådant instrument har man valt att konstruera teodoliten så att den direkta mätningen gäller horisontal- respektive vertikalkomponenten av rymdvinkeln, se Figur 5.2.



Figur 5.2. Horisontalvinkeln β_{2-1} är skillnaden mellan mätt riktning mot punkt 2 och mätt riktning mot punkt 1. Vertikalvinklarna z_1 och z_2 anges i förhållande till zenitriktningen.

Horisontalvinkeln mellan två punkter är skillnaden mellan de räta linjer som utgår från instrumentpunkten till respektive objektpunkts vertikala projektion i horisontalplanet. Det är alltså egentligen inte horisontalvinklar som direkt mäts utan *horisontalriktningar* och vinklar erhålls som skillnader mellan mätta riktningar. I Figur 5.2 mäts riktning mot punkt 1 som ligger ovanför horisontalplanet och riktning mot punkt 2 som ligger under horisontalplanet. Horisontalvinkeln mellan dessa två punkter är skillnaden mellan de räta linjerna utgående från instrumentet och punkternas vertikala projektioner i planet, 2' och 1'. *Vertikalvinkeln* fås däremot direkt och definieras som vinkeln mellan zenitlinjen och siktlinjen till den mätta punkten. I Figur 5.2 är vertikalvinkeln mot punkt 1 mindre än 100 gon och vertikalvinkeln mot 2 är större än 100 gon.

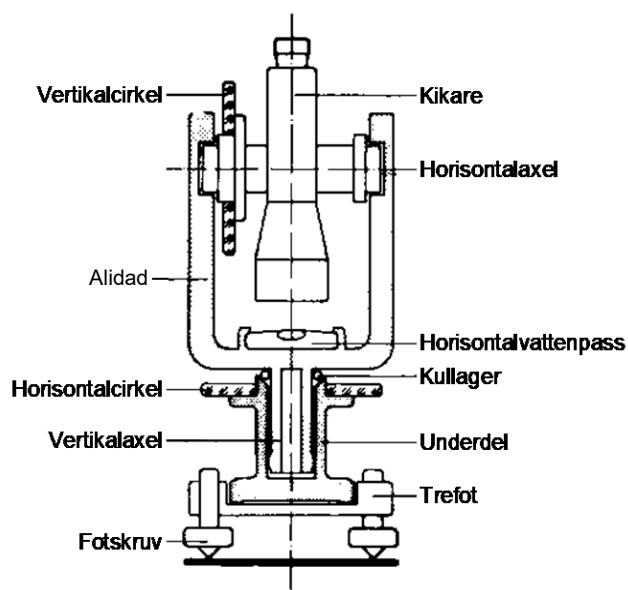
De teodoliter som används idag skiljer sig i princip inte så mycket ifrån de teodoliter som tillverkades på 1800-talet. Självklart har t.ex. optiken och mekaniken i instrumenten förbättrats, men grundprincipen är densamma. Man kan idag skilja på mekaniska och elektroniska (eller digitala) teodoliter. I den senare typen har vissa optiska och mekaniska komponenter ersatts med elektroniska motsvarigheter. Idag används nästan enbart elektroniska teodoliter (totalstationer).

Mekaniska teodoliter

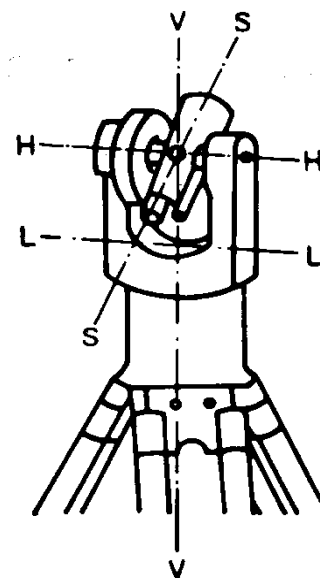
Principiellt så fungerar en mekanisk teodolit genom att en mätkikares rörelse kan avläsas på två graderade cirkelskivor, dels den horisontella rörelsen då kikaren roterar kring sin vertikalexel, dels den vertikala rörelsen då kikaren roterar kring sin horisontalexel. Schematiskt har teodoliten följande huvuddelar och huvudaxlar, se även Figur 5.3 och Figur 5.4.

- *Trefoten* med fotskruvar med vilkas hjälp teodoliten horisongerats
- *Underdelen* där horisontalcirkelskalan är placerad
- *Alidaden (Mellandelen)* som är vridbar kring teodolitens vertikalexel
- *Kikaren* som är vridbar kring horisontalexeln
- *Optiska lodet* med vilket instrumentet centreras
- *Horisontalexeln (HH)*
- *Vertikalexeln (VV)*
- *Siktaxeln (Kollimationsaxeln) (SS)*

- *Horisontalvattenpassets axel (LL)*



Figur 5.3. Teodolitens huvuddelar



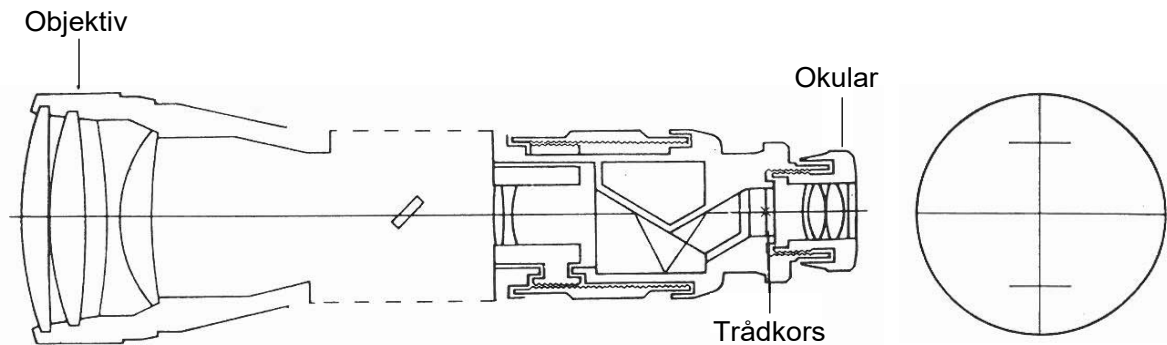
Figur 5.4. Teodolitens huvudaxlar

För att instrumentet ska vara rätt justerat måste följande geometriska villkor vara uppfyllda:

- Horisontalvattenpassets axel ska vara parallell med horisontalaxeln, $LL \parallel HH$
- Horisontalvattenpassets axel ska vara vinkelrät mot vertikalaxeln, $LL \perp VV$
- Horisontalaxeln ska vara vinkelrät mot vertikalaxeln, $HH \perp VV$
- Siktaxeln ska vara vinkelrät mot horisontalaxeln, $SS \perp HH$
- Optiska lodets siktaxel ska sammanfalla med vertikalaxeln
- VV , SS , HH och optiska lodets siktaxel ska gå igenom samma punkt, instrumentets huvudpunkt.

Dessutom får ingen parallax förekomma (se förklaring på sidan 72), och vertikalcirkelns index måste visa 0 gon i zenit och 100 gon eller 300 gon i horisontalplanet. I de fall dessa villkor inte är uppfyllda får man olika typer av instrumentfel. Se avsnitt 5.1.2 för en kortfattad redogörelse för dessa fel och för hur teodoliten kan kontrolleras och justeras med avseende på dem.

Det som kännetecknar en *mätkikare* i en teodolit är att den är försedd med ett s.k. trådkors eller hårkors med vilket man kan sikta på mätobjektet. Övriga komponenter i kikaren är okularet och objektivet samt olika andra linssystem för att t.ex. vända bilden rätt, se Figur 5.5.



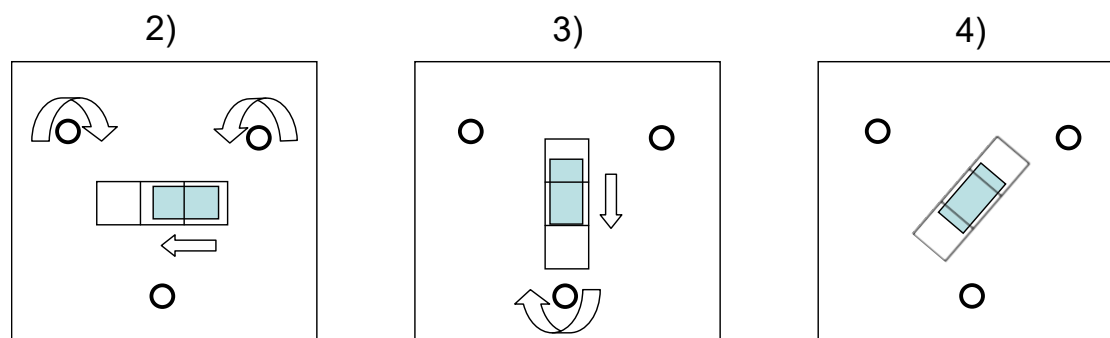
Figur 5.5. Principskiss för en mätkikare. Till höger ett trådkors (hårkors); de kortare strecken används vid optisk distansmätning.

Vid vinkelmätning är det viktigt att man ställer in teodoliten så att bilden av mätobjektet och trådkorset ligger i samma plan, annars föreligger s.k. *parallax*. Parallax konstateras genom att man förflyttar ögat vid okularet och kontrollerar om objektet "rör sig" i förhållande till hårkorset. Om så är fallet har man parallax. För att åtgärda detta förfar man enligt följande: Rikta teodoliten mot ett avlägset objekt, t.ex. mot himlen, och fokusera mot oändligheten. Justera okularets fokusering så att trådkorset blir skarpt. Rikta mot mätobjektet och fokusera. Rör ögat vid okularet och kontrollera om trådkorset "rör sig" relativt bilden av objektet. Om inte så är instrumentet parallaxfritt, annars gör om hela proceduren. Denna kontroll bör göras på rutin vid varje instrumentuppställning.

Det är, som redan nämnts, två graderade cirkelskivor som möjliggör avläsning av kikarens rörelse (i horisontalled är det ju egentligen alidaden med kikaren som roterar). Horisontalcirkeln är placerad i underdelen och vertikalcirkeln är placerad i alidaden, se Figur 5.3. Det finns ofta möjlighet att vrida och ställa in horisontalskalans nollpunkt, detta kallas *förställning*.

Vid mätning måste instrumentet vara horisonterat och detta åstadkoms med hjälp av *vattenpass*. Ett dosvattenpass brukar finnas på trefoten och detta används för *grovhorisontering*. I alidaden finns ännu ett vattenpass, ett rörvattenpass av finare kvalitet, som används för *finhorisontering*. Man brukar finhorisontera teodoliten på följande sätt, se även Figur 5.6:

- 1) Med hjälp av de tre fotskruvarna ställs dosvattenpasset in.
- 2) Vrid alidaden så att vattenpasset kommer parallellt med två av fotskruvarna. Vrid med dessa två fotskruvar samtidigt mot eller från varandra så att vattenpasset spelar in.
- 3) Vrid alidaden 100 gon så att alidaden står vinkelrätt mot den förra positionen (över den tredje fotskruven). Vrid med denna fotskruv så att vattenpasset spelar in.
- 4) Vrid nu teodoliten till olika lägen och kontrollera att vattenpasset alltid spelar in. Om inte, börja om vid 2). Det kan också hända att detta är svårt på grund av att vattenpasset är dåligt justerat. Se avsnitt 5.1.2 om hur man justerar detta.



Figur 5.6. Metod för finhorisontering med hjälp av fotskruvarna.

På äldre teodoliter finns det även ett speciellt vattenpass för vertikalcirkeln som ska ställas in vid vertikalvinkelmätning, men moderna instrument har istället automatisk inställning för höjndindex med hjälp av t.ex. en pendel som påverkar ett prismasystem.

Då man ska ställa upp teodoliten över en viss punkt, s.k. *centrering*, behöver man något hjälpmedel för att instrumentet ska placeras så bra som möjligt över punkten. För detta ändamål kan ett snörlod fastsatt i teodoliten användas, men mycket vanligare är att man använder ett s.k. optiskt lod. Detta kan sitta i trefoten eller i alidaden, beroende på instrumenttyp. Det optiska lodet är ett optiskt system med ett trådkors med vilket man kan se underlaget (marken) och på så sätt ställa in instrumentet över punkten. Alternativt kan instrumentet vara försett med laserlod, då en laserpunkt projiceras på underlaget. Centrering brukar göras tillsammans med horisonteringsproceduren. På vissa typer av stativ finns det en fast stång som används för centrering.

Elektroniska teodoliter

En elektronisk eller digital teodolit har samma huvuddelar och huvudaxlar som en mekanisk och samma geometriska villkor måste vara uppfyllda för en justerad teodolit. Den stora skillnaden är att cirkelavläsningarna (mätning och presentation) görs på elektronisk väg. Vissa instrumenttyper har även elektroniska pendlar som ersätter horisontalvattenpasset men kikare, trefot etc. är desamma som för de mekaniska teodoliterna.

5.1.2 Kontroll och justering av teodoliter

I avsnitt 5.1.1 satte vi upp vilka geometriska villkor teodolitens huvudaxlar måste uppfylla. Vi ska i detta avsnitt, relativt kortfattat, beskriva några av de fel som uppkommer om vissa av dessa villkor **inte är uppfyllda** och hur man kan justera eller, med lämpliga mätmetoder, eliminera felen. Beskrivningen gäller de mekaniska teodoliterna, de elektroniska behandlas i slutet av detta avsnitt.

Vissa instrumentfel kan elimineras genom mätning i helsats. Det innebär att man tar medelvärdet av mätningar i två cirkellägen. Att byta cirkelläge innebär att man slår igenom och svänger om teodoliten ett halvt varv. Helsatsmätning tillämpas normalt vid stommätning men sällan vid detaljmätning.

Horisontalvattenpassets axel är inte vinkelrät mot vertikalaxeln.

Vattenpassets blåsa flyttar sig då teodoliten roteras kring vertikalaxeln. Det finns ingen mätmetod för att eliminera detta fel utan det måste justeras bort. Detta kan göras genom att ställa upp instrumentet på ett stadigt underlag (en fast mätpelare är ännu bättre) och grovhorisontera. Ställ alidaden över två av fotskruvarna och vrid på dem mot eller från varandra så att vattenpassets blåsa centreras. Vrid alidaden ett halvt varv, 200 gon.

Blåsans avvikelse (avläses på rörvattenpassets gradering) anger det dubbla felet. Hälften av avvikelserna justeras med hjälp av fotskruvarna och resten justeras med vattenpassets justerskruvar. Kontrollera igen.

Siktaxeln är inte vinkelrät mot horisontalaxeln. Felet kallas *kollimationsfel i sidled*.

Detta fels inverkan påverkas av vertikalvinkelns storlek. Mätning mot objekt som har samma vertikalvinkel påverkas således inte av felet. Felet elimineras genom att mäta helsatser och bilda medeltal. För kontroll och justering: Ställ upp instrumentet på stadigt underlag, horisontera och rikta mot ett avlägset, väldefinierat objekt på ungefär samma höjd som instrumentet dvs. med vertikalvinkel nära 100 gon. Avläs horisontalriktningen. Slå igenom och omsväng teodoliten ett halvt varv och rikta in på nytt mot samma objekt. Avläs horisontalriktningen. Skillnaden bör vara 200 gon och en eventuell skillnad därifrån är det dubbla kollimationsfelet i sidled. Detta är i verkligheten inte riktigt sant eftersom man i varje mätning också har slumpmässiga instrument-, inriktnings- och inställningsfel som nu kommer att ingå i det uppskattade kollimationsfelet. Justera halva felet genom att flytta trådkorset med hjälp av trådkorsets justerskruvar. Kontrollera igen.

Vertikalindex är inte justerat. Felet kallas *kollimationsfel i höjddled eller indexfel*.

Vid vertikalvinkelmätning är det viktigt att vertikalskalan visar exakt 0 gon i zenit och 100 gon (eller 300 gon) i horisontalplanet. Detta fels inverkan elimineras genom helsatsmätning och medeltalsbildning. Kontrollen görs genom att ställa upp instrumentet på fast underlag och horisontera. Rikta mot ett väldefinierat objekt och läs av vertikalvinkeln. Slå igenom och sväng om och mät mot samma objekt igen. Avläs vertikalvinkeln. Summan av de båda avläsningarna borde vara exakt 400 gon. Skillnaden därifrån är det dubbla indexfelet. Justering görs genom att med hjälp av vertikalindexets justerskrub ställa in korrigerad vertikalvinkel. På äldre teodoliter utan automatiskt höjindex görs justeringen istället på justerskruven för vertikalindexets vattenpass (kollimationsvattenpasset).

Horisontalaxeln är inte vinkelrät mot vertikalaxeln. Detta fel kallas *inklinationsfel*.

Detta fels inverkan påverkas av vertikalvinkelns storlek. Om man mäter objekt som har samma vertikalvinkel blir mätningen rätt ändå. Elimineras med helsatsmätning och användning av medelvärde. Följande procedur kan användas för att kontrollera om detta fel föreligger: Först måste instrumentet vara justerat med avseende på kollimationsfel. Ställ upp instrumentet på stadigt underlag, horisontera och rikta mot ett väldefinierat objekt som ligger minst 15 gon över horisontalplanet. Avläs horisontalriktningen och vertikalvinkeln. Slå igenom och omsväng teodoliten ett halvt varv och rikta in på nytt mot samma objekt. Avläs horisontalriktningen. Skillnaden mellan riktningsavläsningarna bör vara 200 gon. Skillnaden därifrån gånger tangenten för vertikalvinkeln är det dubbla inklinationsfelet. Justering måste göras av fackman.

Optiska lodets siktaxel sammanfaller inte med vertikalaxeln.

Detta fels inverkan går inte att eliminera utan måste justeras bort. Det finns flera olika sätt att kontrollera detta fel och här beskrivs två av sätten. Ställ upp instrumentet på fast underlag och horisontera. Markera nedlodningspunkten med hjälp av ett snörlod. Justera in optiska lodet med hjälp av dess justerskruvar. Kontrollera igen. Ett ännu bättre sätt är att ha en fast mätpelare med markerad nedlodningspunkt. Då är det bara att justera direkt.

För elektroniska teodoliter genomförs alla ovan beskrivna kontroller på samma sätt men

de uppmätta kollimations- och inklinationsfelen kan lagras i instrumentet för automatisk korrigerings direkt vid mätning (gäller inte alla instrumenttyper). Men eftersom instrumentfelen kan ändras p.g.a. temperaturväxlingar eller skakningar måste man mäta upp dessa fel regelbundet så att ”rätt” fel korrigeras. Ett lagrat felaktiga kollimations- och inklinationsfel är ju värdelös information och försämrar mätresultatet.

Det är också viktigt att, förutom instrumentet, all annan kringutrustning som stativ, mätsignaler etc. är kontrollerade och justerade.

5.2 Längdmätninginstrument

Att mäta avstånd är ett viktigt moment vid olika mätningstekniska tillämpningar och tekniken för detta har förändrats mycket genom åren. I slutet av 1800-talet använde t.ex. Sven Hedin gångtiden för en kamel för att mäta eller uppskatta avstånd. Han lät kamelen gå i olika terrängtyper under olika förhållanden och sammanställde sedan tabeller för avståndet som en funktion av gångtid, terrängtyp etc. Tillsammans med vinkelmätning med teodolit eller kompass kunde han sedan positionsbestämma detaljer och rita kartor över de områden han utforskade.

Att mäta avstånd med olika typer av mätband eller mätkedjor har också använts, och används fortfarande i vissa tillämpningar. Noggrann bandmätning är dock tidsödande och medför olika problem, speciellt vid längre avstånd. Därför mättes tidigare enbart ett fåtal kortare längder, s.k. baslängder, vid uppbyggnaden av referensnät i form av triangelnät. I övrigt mättes endast vinklar.

På 1950-talet kom ett helt nytt längdmätninginstrument, EDM-instrumentet, som möjliggjorde noggrann mätning av långa avstånd (flera mil) och detta medförde att man började mäta **både** vinklar och längder vid stommätning.

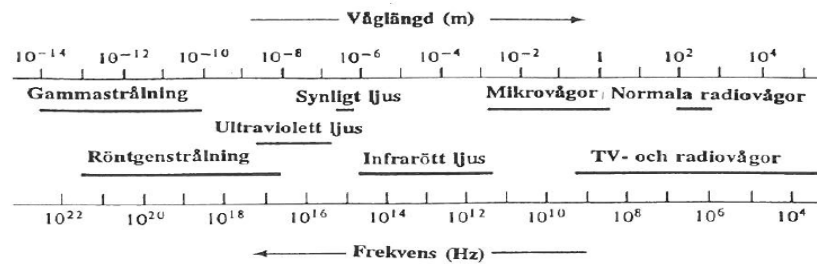
5.2.1 EDM-instrument

Det var i samband med försök att mäta ljushastigheten som Erik Bergstrand utvecklade en ny metod att mäta avstånd. AGA tillverkade därefter det första kommersiella EDM-instrumentet 1948, med namnet Geodimeter. I och med detta kunde avstånd på flera mil mätas med liten mätosäkerhet. Efter detta genombrott har AGA och sedan andra tillverkare förbättrat och vidareutvecklat EDM-instrumentet.

EDM-instrumenten baseras på mätningar av elektromagnetiska vågor. Mellan våglängden (λ), utbredningshastigheten (c) och frekvensen (f) för elektromagnetiska vågor råder följande samband:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad 5.1$$

Vi ser att en skillnad i frekvens ger en skillnad i våglängd. Några typer av elektromagnetisk strålning kan ses i Figur 5.7.



Figur 5.7. Det elektromagnetiska spektrumet.

Från Figur 5.7 kan vi som exempel på olika elektromagnetisk strålning se att *mikrovågor* är radiovågor med kort våglängd, de kallas ibland också för radarvågor. *Synligt ljus* har våglängder mellan $4 \cdot 10^{-7}$ m och $7 \cdot 10^{-7}$ m. *Infrarött ljus*, IR ljus, har våglängder mellan synligt ljus och mikrovågor.

Utbredningshastigheten, c , beror på de medium i vilket de elektromagnetiska vågorna utbreder sig, men även på våglängden. Det gäller att

$$n = \frac{c_0}{c} \quad 5.2$$

där c_0 är ljushastigheten i vakuum ($2,99792458 \cdot 10^8$ m/s) och n är brytningsindex.

I varje medium är utbredningshastigheten mindre än ljushastigheten i vakuum. Brytningsindex, n , är en funktion av lufttryck (p), lufttemperatur (t), ångtryck (e) och våglängd (λ).

Man brukar dela in EDM-instrumenten i grupper efter vilken typ av elektromagnetisk strålning de använder, t.ex. kallas de som använder synligt ljus och kortvågig IR-strålning ($0,4 \cdot 10^{-6} \leq \lambda \leq 1,3 \cdot 10^{-6}$ m) för *elektrooptiska längdmättningsinstrument* medan de som använder radiovågor ($\lambda > 0,008$ m) kallas för *mikrovågsinstrument*. Nedan kommer enbart principer för elektrooptiska instrument behandlas. För information om mikrovågsinstrument, se t.ex. Burnside (1991).

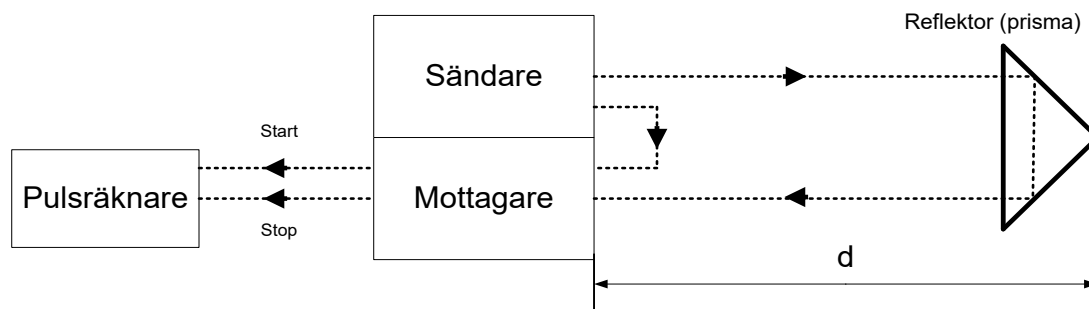
Det finns för närvarande två mätprinciper för elektrooptiska instrument: *impulsprincipen* och *fasskillnadsprincipen*. Tidigare har instrument som använder fasskillnadsmetoden varit helt dominerande, men nu finns det ett flertal impulsinstrument på marknaden.

Ett *impulsinstrument* består principiellt av en sändare, en mottagare, en pulsräknare och en mikroprocessor. Mätning enligt denna metod framgår av Figur 5.8. Mäter man gångtiden, t , mellan sändare och mottagare för en impuls (ofta en laserimpuls) så kan man bestämma längden, d , som

$$d = \frac{c_0 t}{2n} \quad 5.3$$

Eller enligt formel 5.2

$$c = \frac{c_0}{n} \Rightarrow d = \frac{c t}{2} \quad 5.4$$



Figur 5.8. Mätprincipen för ett impulsinstrument.

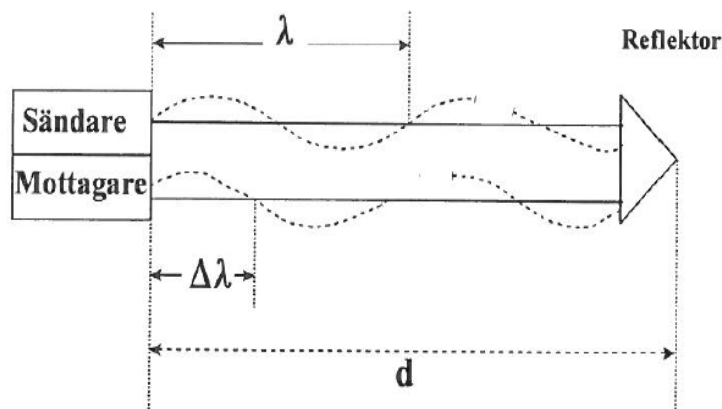
När sändaren skickar en impuls mot reflektorn går en liten del av impulsen direkt till mottagaren som startar pulsräknaren, se Figur 5.8. Pulsräknaren räknar sedan tiden tills den reflekterade impulsen kommer tillbaka.

Det finns några fördelar med impulsmetoden jämfört med fasskillnadsmetoden, som beskrivs nedan, t.ex. så reduceras mättiden och mätning kan göras direkt mot objektet utan reflektor, vilket underlättar mätning om det är svårt eller omöjligt att placera reflektorn på mätpunkten.

Ett instrument som utnyttjar *fasskillnadsmätning* består principiellt av en sändare, en mottagare, en fasmätare och en mikroprocessor. Mätprincipen framgår av Figur 5.9. Om man kan bestämma det hela antalet våglängder och den eventuella fasskillnaden mellan utsänd och inkommande mätsignal kan längden, d , beräknas,

$$d = N \frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta\lambda}{2} \quad 5.5$$

där N är antalet hela våglängder och $\Delta\lambda$ är den mot fasskillnaden svarande delen av en hel våglängd.



Figur 5.9. Mätning enligt fasskillnadsmetoden.

Längdbestämmning med denna metod består alltså av två moment, dels att bestämma fasskillnaden, dels att bestämma antalet hela våglängder.

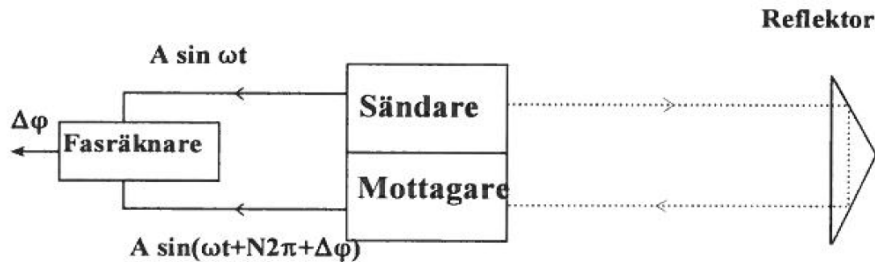
Att bestämma fasskillnaden, som motsvarar en viss del av en hel våglängd, görs principiellt enligt Figur 5.10. En del av den utsända signalen skickas direkt till fasmätaren och har då formen.

$$Y_D = A \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi f \quad 5.6$$

där A är amplituden och f är frekvensen. Den reflekterade signalen har formen,

$$Y_R = A \sin(\omega t + \Phi), \Phi = 2\pi N + \Delta\phi \quad 5.7$$

där 2π motsvarar längden av en hel våglängd, N är antalet hela våglängder och $\Delta\phi$ är fasskillnaden mellan utsänd och reflekterad signal.



Figur 5.10 Principen för fasräkning.

Fasräknaren kan endast mäta fasskillnaden, $\Delta\phi$, och den resterande delen av en våglängd som svarar mot denna fasskillnad blir då:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \lambda \quad 5.8$$

Det andra momentet är att bestämma antalet hela våglängder (N). Om vi i ekvation 5.5 sätter $\lambda/2=U$ och $\Delta\lambda/2=R$, så får vi

$$d = NU + R \quad 5.9$$

U kallas också för *enhetslängd* och hela antalet hela våglängder kan beräknas om vi mäter längden med olika frekvenser. Vi får då:

$$\begin{aligned} f_1: d &= N_1 U_1 + R_1 \\ f_2: d &= N_2 U_2 + R_2 \\ &\vdots \\ f_n: d &= N_n U_n + R_n \end{aligned} \quad 5.10$$

Detta ekvationssystem med n ekvationer och $n + 1$ obekanta (d och N_1-N_n) kan lösas på flera olika sätt. Ett sätt är att välja f_1 så att U_1 alltid är större än den mätta sträckan. Då är $N_1 = 0$ och den första ekvationen i 5.10 är $d=R_1$, och vi har en entydig lösning av sträckan d . Denna lösning begränsas dock av upplösningen i fasmätningen. Om enhetslängden U_1 är flera kilometer så kan längden endast bestämmas med metersäkerhet. För att erhålla ett bättre resultat måste flera mätningar med olika frekvenser göras. Vi illustrerar denna teknik med följande exempel, som är ett vanligt sätt att välja frekvenserna:

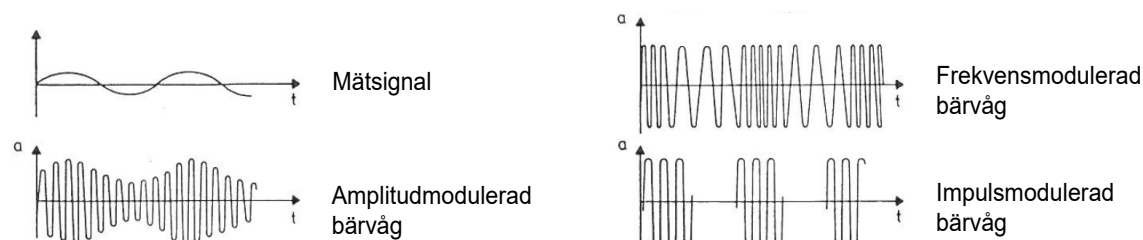
I	F	Enhetslängd (m)	R
1	15 MHz	10	8437
2	1,5 MHz	100	882
3	150 KHz	1000	789
Mätt längd = 788,437 m			

Den första mätningen kallas *finavläsning* medan de andra två kallas *grovavläsning*.

Andra sätt att lösa antalet hela våglängder bygger på att frekvenserna väljs så att ekvationssystemet 5.10 kan lösas.

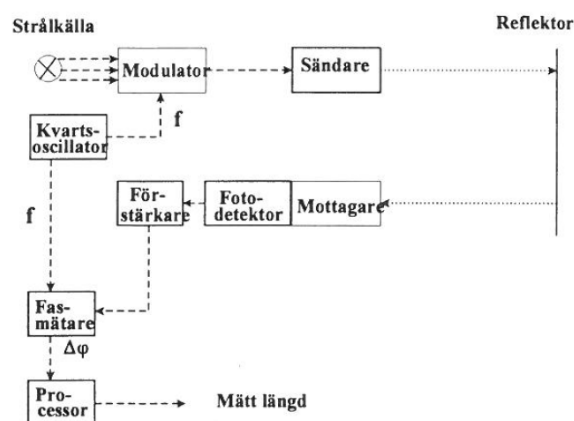
Kapitel 5: Mätinstrument

För att kunna mäta längder med några millimeters osäkerhet kan man inte mäta direkt på den elektromagnetiska mätsignalen utan man måste ”gradera” den. Detta görs genom att *modulera* den, vilket resulterar i en *modulerad bärväg*. Det finns flera tekniker för att göra detta, t.ex. amplitud- frekvens- och impulsmodulering. De olika teknikerna visas i Figur 5.11.



Figur 5.11. Olika sätt att modulera mätsignalen.

I Figur 5.12 visas en schematisk bild av ett EDM-instrument som arbetar med fasmätning.



Figur 5.12. Principskiss för ett EDM-instrument som använder fasmätning.

De båda ovan beskrivna metoderna för EDM-mätning kräver att atmosfärskorrektion görs av den mätta längden. De elektromagnetiska vågornas hastighet beror ju på brytningsindex (n) enligt formel 5.4, och brytningsindex i sin tur beror på lufttryck (p), lufttemperatur (t), ångtryck (e) och våglängd (λ). EDM-instrumentet använder vid längdbestämningen en *referensatmosfär* (som är olika för olika fabrikat). Därför behöver man känna den aktuella atmosfären vid mättillfället för att korrigera den mätta längden. Korrektionen beräknas och ställs in direkt på instrumentet eller påföres den mätta okorrigerade längden i efterhand. I normala fall behöver inte ångtrycket mätas, dess inverkan är försumbar, utan det räcker med enbart lufttemperatur och lufttryck. Egentligen behöver man känna atmosfären efter hela sträckans längd (där strålen utbreder sig), eftersom förhållandena kan variera mycket. men ofta mäts tryck och temperatur endast vid instrumentuppställningen. I vissa fall mäts dessa parametrar även vid reflektoruppställningen och ett medeltal av ändpunkternas värden används för korrektionsberäkningen. Eftersom olika fabrikat använder olika referensatmosfärer finns det särskilda korrektionsformler för varje instrument. Ett fel i uppmätt temperatur på $1\text{ }^\circ\text{C}$ eller ett tryckfel på 3 hPa ger ett skalfel på ungefär 1 mm/km .

5.2.2 Kontroll av EDM-instrument

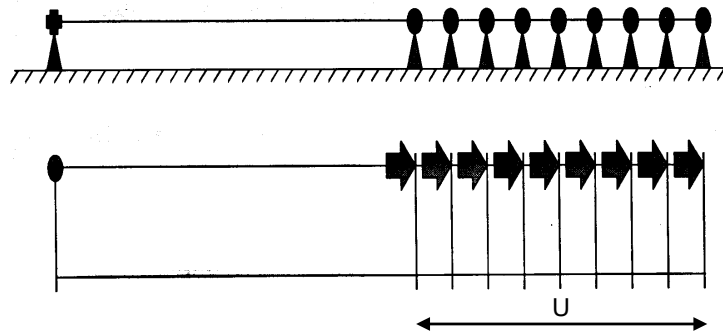
Förutom atmosfärens inverkan vid EDM-mätning finns det ytterligare felkällor. Man brukar indela instrumentfelen i *skalfel*, *nollpunktsfel* och *cykliskt fel*.

Skalfelet är proportionellt mot den mätta längden och beror på att modulationsfrekvensen drivit iväg från sitt rätta värde. Modulationsfrekvensen, dvs. frekvensen som används för att modulera mätsignalen, bör kontrolleras med en frekvensräknare och justeras vid behov. Detta måste göras av fackman.

Nollpunktsfelet är ett konstant fel som beror på skillnad mellan instrumentets mekaniska och elektriska centrum. Felet kan förändras med tiden och bör kontrolleras regelbundet. Ett annat konstant fel uppkommer om man mäter mot en reflektor med annan reflektorkonstant än den som ställts in på instrumentet.

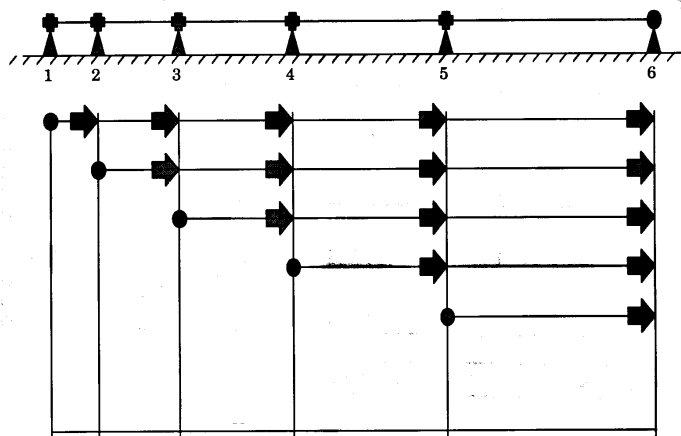
Cykliskt (periodiskt) fel kan ha olika orsaker och uppträda med olika periodicitet. Vanligaste orsaken är brister i fasmätningen vilket ger en periodicitet lika med en enhetslängd.

Nollpunktsfel och cykliska fel kan kontrolleras genom mätningar på en kalibreringsbas. Det är enklast om man har tillgång till en bas med kända avstånd, där mätningarna blir jämnt fördelade över en enhetslängd, se *Figur 5.13*. Medeltalet av differenserna mellan mätta och kända avstånd ger nollpunktsfelet och differensernas variationer visar det cykliska felet.



Figur 5.13. Kalibrering på känd bas.

Alternativt kan ett nollpunktsfel bestämmas som differensen mellan ett direktmätt avstånd (inklusive ett nollpunktsfel) och summan av två mätta delsträckor (som innehåller två nollpunktsfel). Om man inte har tillgång till en känd bas kan man dela upp en sträcka i ett antal delsträckor och göra differensmätningar i alla kombinationer, se *Figur 5.14*. Delsträckorna väljs på ett listigt vis så att de mätta avstånden blir jämnt fördelade över enhetslängden.



Figur 5.14. Kalibrering på okänd bas.

5.3 Kombinerade vinkel- och längdmättningsinstrument

5.3.1 Totalstation

Separata instrument för vinkelmätning (teodolit) och längdmätning (EDM-instrument) var en vanlig lösning tidigare, men idag är *totalstationen* den helt dominerande instrumenttypen; se Figur 5.15. Den är i princip en elektronisk teodolit och ett EDM-instrument som integrerats och som alltså mäter både riktningar och längder. Därmed är det möjligt att bestämma inbördes läget mellan punkter i en enda mätoperation, planläget genom polär mätning, och höjdläget genom trigonometrisk höjdmätning, se avsnitt 6.2.1 och 6.3.3.

Totalstationer har också minne för datalagring och mer eller mindre avancerade beräkningsfunktioner, som koordinat- och areaberäkning, kontroller etc. Data kan överföras till en dator för vidare bearbetning på kontoret, eller från en dator för utsättning i fält. Vissa totalstationer har servomotorer som kan rikta in instrumentet automatiskt mot en reflektor. Det går då oftast att fjärrstyra instrumentet från en dator eller kontrollenhet, t.ex. vid reflektorn. Då kan mätning, datalagring och beräkning skötas av en person. Det finns även lösningar där totalstationsmätning och mätning med GNSS-teknik har integrerats.

Beskrivningarna i avsnitt 5.1 och 5.2 om funktion och kontroll av teodoliter och EDM-instrument gäller även för totalstationer.



Figur 5.15. En totalstation, Trimble S3.



Figur 5.16 En laserscanner, Leica HDS3000.

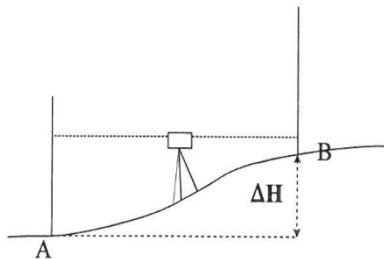
5.3.2 Terrester laserskanner

En terrester *laserskanner*, se Figur 5.16, är en vidareutveckling av totalstationen, där längdmätningen görs med flera tusen pulser per sekund, samtidigt som servomotorerna vrider instrumentet och vinkelmätningen sker kontinuerligt. Instrumentet används t.ex. för detaljerad tredimensionell dokumentation av komplexa objekt. Data från mätningen blir ett "moln" av koordinatbestämda punkter, som sedan kan bearbetas till en 3D-modell för t.ex. CAD-program. Terrester laserskanning beskrivs mer i detalj i kapitel 15.

5.4 Instrument för höjdmätning

Med höjdmätning menas här bestämning av höjdskillnader mellan punkter. Det traditionella sättet att mäta höjdskillnader är *avvägning*. Man brukar skilja på olika noggrannhetstyper av avvägning: precisions-, fin- och vanlig avvägning. Precisionsavvägning är den mest noggranna metoden och där använder man förutom de avvägda höjdskillnaderna också tyngdkraftsinformation eftersom tyngdkraften varierar och påverkar de mätta höjdskillnaderna. Det som skiljer olika typer av avvägning är främst instrumenteringen men annars är grundprincipen densamma.

Grundprincipen för att bestämma höjdskillnaden mellan två punkter A och B med avvägning är följande: Två graderade *avvägningsstänger* med vattenpass ställs upp vertikalt på punkterna, se Figur 5.17, och *avvägningsinstrumentet* ställs upp mellan stängerna och horisonteras med hjälp av ett vattenpass. Instrumentet riktas först mot A och avläsning (l_A) görs på den graderade stängen och sedan på samma sätt mot B, (l_B). Den sökta höjdskillnaden från A till B blir $\Delta H_{A-B} = l_A - l_B$. På detta sätt kan man sedan successivt bestämma höjdskillnader mellan ytterligare punkter. Vanligtvis brukar man dela upp avvägningen mellan två punkter genom att göra många deluppställningar, vilket resulterar i avvägningståg; se vidare avsnitt 6.3.2.



Figur 5.17. Grundprincipen för avvägning.

En genomgång av avvägningsinstrumentets funktion och felkällor samt av några olika typer av instrument görs i avsnitt 5.4.1 och 5.4.2. Avvägning kan även göras med laserinstrument, se avsnitt 5.4.3.

Det finns även andra metoder för att mäta höjdskillnader, t.ex. *barometerhöjdmätning*, *trigonometrisk höjdmätning*, *hydrostatisk höjdmätning* och *höjdmätning med GNSS*.

5.4.1 Avvägningsinstrument

Ett avvägningsinstrument kan förenklat ses som en mät kikare med ett vattenpass monterat parallellt med siktaxeln. Även för avvägning skiljer man mellan mekaniska och elektroniska instrument, där de senare läser av avvägningsstången automatiskt. Vi kommer nedan att gå igenom båda huvudtyperna. Det finns många olika tillverkare av avvägningsinstrument och många modeller med olika mätprecision och handhavande.

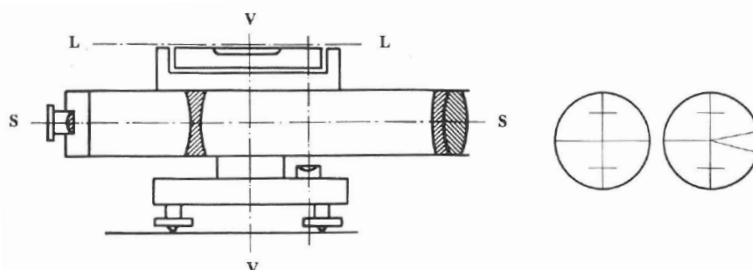
Mekaniska avvägningsinstrument

Vid avvägning ska siktlinjen i mät kikaren vara horisontell och detta kan göras genom att horisontera ett på kikaren monterat rörvattenpass eller med en kompensator; se nedan. I övrigt är mät kikaren i princip densamma som i en teodolit, se avsnitt 5.1.1, men trådkorset (hårkorset) har även s.k. distanstrådarna, se Figur 5.18 (dessa kan även finnas i teodolitens kikare, se Figur 5.5). Dessa är så placerade att man genom att på avvägningsstången avläsa antalet cm mellan distanstrådarna kan få en ungefärlig längd mellan instrument och avvägningsstång (längden är lika med en konstant, ofta 1 m/cm,

Kapitel 5: Mätinstrument

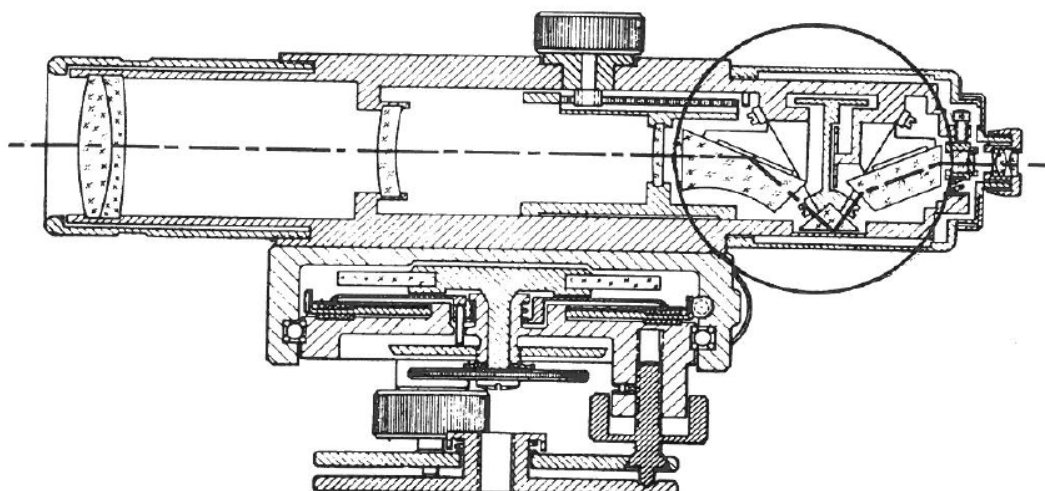
gångar antalet avlästa cm). Denna optiska avståndsmätning används bl.a. vid beräkning (utjämning) av avvägningsmätningar. Avvägningsinstrumentet har tre huvudaxlar, se Figur 5.18, och följande geometriska villkor ska uppfyllas för ett justerat instrument:

- Horisontalvattenpassets (kompensatorns) axel ska vara vinkelrät mot vertikalaxeln, $LL \perp VV$
- Horisontalvattenpassets (kompensatorns) axel ska vara parallell med siktaxeln, $LL // SS$
- Siktaxeln ska vara vinkelrät mot vertikalaxeln, $SS \perp VV$
- Dessutom ska instrumentet vara parallaxfritt, se avsnitt 5.1.1.



Figur 5.18. Till vänster huvudaxlarna på ett avvägningsinstrument, till höger två olika exempel på trådkors med distanstrådar i en mätvikare.

Det finns framförallt två huvudtyper av avvägningsinstrument, dels de med rörvattenpass, dels de med ett dosvattenpass och där sedan en *kompensator* automatiskt finhorisonterar instrumentet inom vissa gränser. Grovhorisonteringen görs som vanligt med dosvattenpasset. Den vanligaste kompensatorn består av ett optiskt system där ett eller flera prismor är fritt pendlande och som dämpas på olika sätt. Dämpningen är nödvändig för att möjliggöra avläsning och denna kan göras genom luftdämpning, pneumatisk dämpning, magnetisk dämpning eller genom vätskedämpning. I Figur 5.19 kan vi se ett avvägningsinstrument med en kompensator.

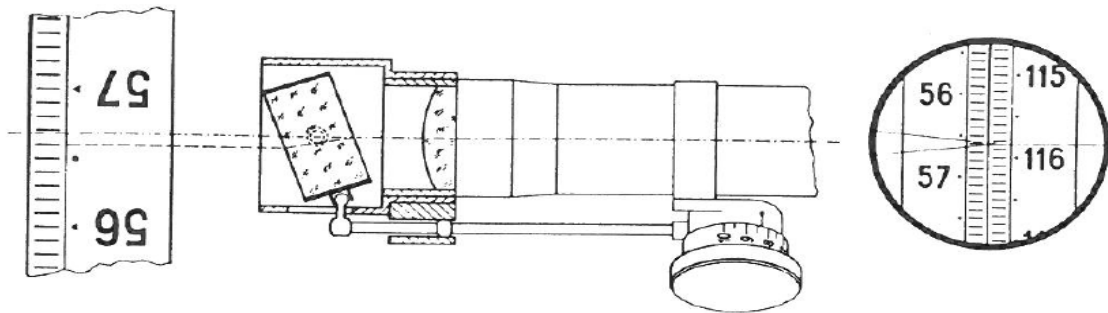


Figur 5.19. Avvägningsinstrumentet Zeiss Ni 2 i genomsnitt. Kompensatorn ses i den svarta cirkeln.

Kompensatorn i Figur 5.19 fungerar så att siktaxeln horisonteras genom att den passerar genom prismasystemet i kompensatorn. Det finns även andra kompensatormetoder. I vissa fall kan kompensatorinstrument fungera sämre än traditionella vattenpass-

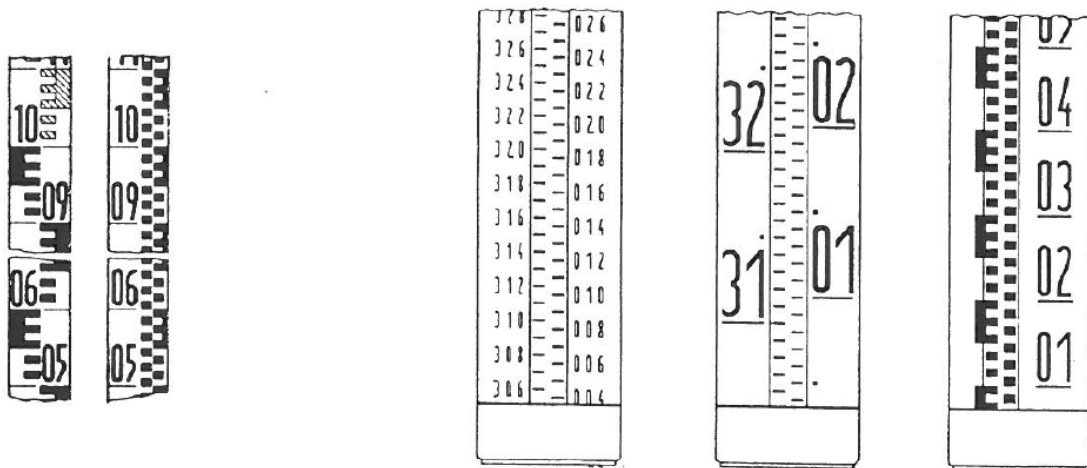
instrument, t.ex. vid svåra vindförhållanden då kompensatorn även med dämpning omöjliggör avläsning (bilden vibrerar).

På vissa typer av instrument finns det en planparallell glasplatta som möjliggör mätning med lägre osäkerhet, vilken kallas för planglasmikrometer. På vissa modeller kan detta tillbehör även sättas på temporärt för att öka precisionen i mätningarna för speciella tillämpningar. Genom vridning av en optisk mikrometer, dvs. *planplattan*, höjs eller sänks hela bilden i kikaren utan att den i övrigt förändras. Förskjutningen av bilden avläses på mikrometern som kan ha olika upplösning, men som ofta ger avläsning i tiondelar av en millimeter. I Figur 5.20 kan vi se ett exempel på hur en sådan planparallell glasplatta fungerar.



Figur 5.20. En planglasmikrometers funktion. På stängen läser vi 5,66 och på mikrometern 83 så avläsningen blir $5,66 + 0,0083 = 5,6683$.

Vid vanlig avvägning används ofta avvägningsstänger av trä, aluminium eller kolfiber med cm- eller mm-gradering direkt på stängen, men vid fin- eller precisionsavvägning används stänger där själva skalorna eller skalorna är av invar, som är en legering med extremt liten längdutvidgningskoefficient. De senare kan vara cm- eller 1/2 cm-graderade och används då tillsammans med en planglasmikrometer. Ofta finns det också på den senare varianten två skalor som kan användas för kontroll av mätningen, t.ex. för att hitta avläsningsfel, och för att minska motsäkerheten. I Figur 5.21 visas några olika typer av avvägningsstänger.



Figur 5.21. Olika typer av avvägningsstänger: Till vänster två vanliga trästänger och till höger tre invarstänger.

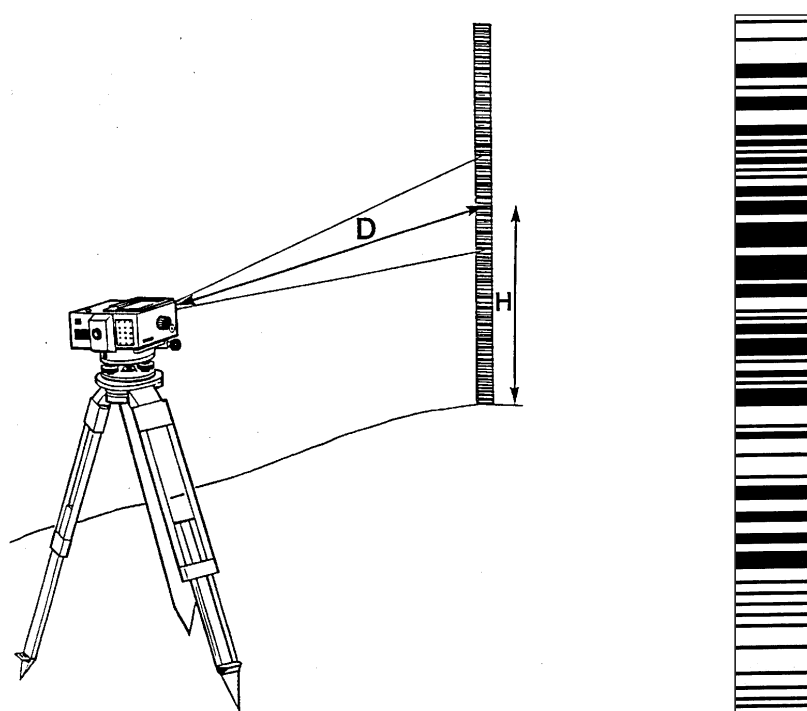
Elektroniska avvägningsinstrument

Kapitel 5: Mätinstrument

Det vanliga, mekaniska avvägningssinstrumentet fick i slutet av 1980-talet konkurrens av det *elektroniska* eller *digitala avvägningssinstrumentet*. I detta instrument har avläsningen av avvägningstången automatiserats, dvs. användaren riktar instrumentet mot stängen och avläsning av denna görs där en sensor ersätter det mänskliga ögat.

Dessa instrument tillverkas av flera olika företag och självklart har de olika fabrikaten olika funktioner och arbetssätt, men huvudprinciperna är gemensamma. Nedanstående beskrivning gäller för ett speciellt fabrikat, men stora delar av beskrivningen är också tillämplig för andra fabrikat.

Avvægningstången har en speciell binärkod i ett svartvitt mönster (streckkod), se Figur 5.22. Bilden av en del av stängen avbildas på en detektor i instrumentet (målsensor) och omvandlas till ett signalmönster. Stångens binärkod finns lagrad i instrumentet och det mätta signalmönstret jämförs med denna. Därmed kan instrumentet identifiera var på stängen avläsningen görs.

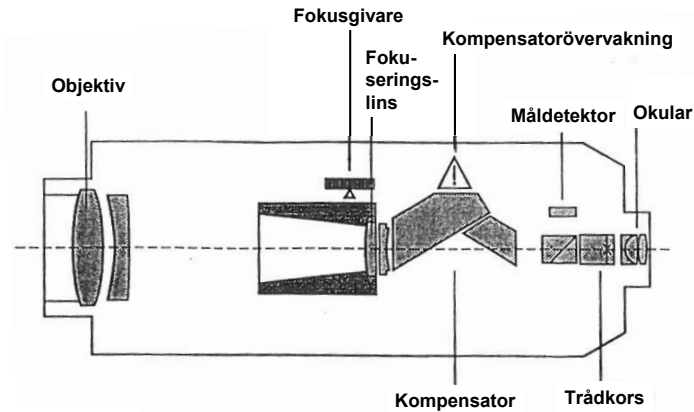


Figur 5.22. Principskiss för mätning med ett elektroniskt avvægningssinstrument. Till höger en avvægningstång med den speciella streckkoden.

Grundelementet för avvægningstångens binära kod är ungefär 2 mm och den fullständiga koden omfattar 2000 element och en stånglängd av 4,05 m. Stångerna kan vara av olika material men det är nu för tiden vanligt med stänger i invar för finavvægning.

Målsensorn som omvandlar bilden till elektriska signaler består av 256 fotodioder och optikens öppningsvinkel är 2 gon. Om stängen befinner sig 1,8 meter från instrumentet så avbildas 70 mm av streckkoden och på 100 meter avbildas 3,5 meter av koden och detta är instrumentets "mätområde", avvægningstången får inte vara närmare än 1,8 m eller längre bort än 100 m. 80 % av den detekterade bilden måste utgöras av avvægningstången och detta innebär att på 50 m måste ungefär 1,3 m av stängen vara synlig. Ett annat fabrikat kräver att endast 0,15 m på var sida om siktaxeln är synlig, oavsett avstånd.

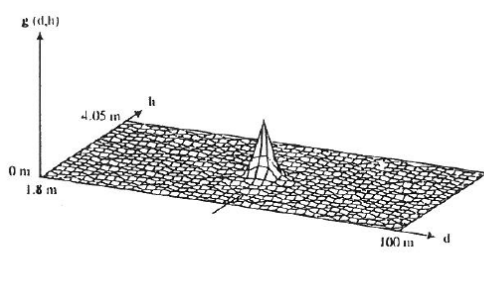
Fokusering och kontroll av kompensatorn görs elektroniskt. I Figur 5.23 ser vi ett tvärsnitt av instrumentet.



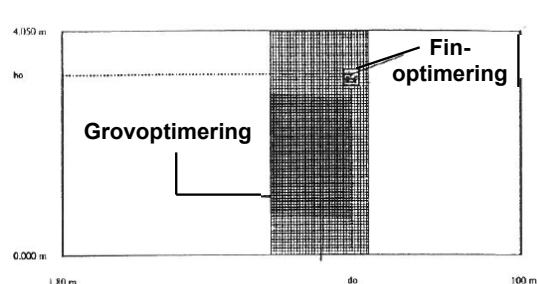
Figur 5.23. Ett elektroniskt avvägningsinstrument i genomskärning.

Jämförelsen mellan avbildad kod från stången och lagrad kod görs genom *korrelation*. Den lagrade koden och den avbildade streckkoden från avvägningsstången jämförs med hjälp av en speciell korrelationsfunktion och vid jämförelsen görs optimering av två parametrar, dels höjd, dels avstånd, där höjd är höjdskillnaden mellan instrument och stång och avstånd är längden mellan instrument och avvägningsstång. Detta innebär att förutom höjdskillnaden erhålls även längden till stången.

För att optimera dessa, dvs. vi måste hitta koordinaterna för korrelationsfunktionens maximum, måste hela mätområdet avsökas. Längdintervallet för området är som ovan sagts 1,8–100 m och höjdintervallet är 0–4,05 m. Denna sökning är mycket omfattande så därför görs först en *grovoptimering* och sedan en *finoptimering*. Den förstnämnda söker i rastret efter närmekoordinaterna för maximum, den s.k. korrelationstoppen, se Figur 5.24, och med hjälp av fokuseringslinsens inställning som närmevärde för avståndet till stången begränsas längdintervallet.



Figur 5.24a. Hela sökområdet med korrelationstoppen



Figur 5.24b. Grov- och finoptimering

Med finoptimeringen ska det relativa läget för stångbilden i måldetektorn bestämmas med högsta precision och detta görs genom fullständiga korrelationsberäkningar i det mindre sökområdet (Figur 5.24b).

Instrumenten finns i olika modeller och innehåller även programvara för olika typer av beräkningar direkt i fält samt har även funktioner för lagring av mätdata.

5.4.2 Kontroll och justering av avvägningssinstrument

Vi såg i avsnitt 5.4.1 vilka geometriska villkor som måste vara uppfyllda för ett avvägningssinstrument. I detta avsnitt tittar vi närmare på de fel som uppkommer när de **inte uppfylls**.

Horisontalvattenpassets axel är inte vinkelrät mot vertikalaxeln.

Man ställer in rörvattenpasset, men när man vrider instrumentet spelar det inte längre in. Eftersom man alltid finhorisonterar instrumentet med rörvattenpasset precis innan varje avläsning, dvs. vid varje inriktning, så resulterar detta inte i felaktiga mätningar så länge horisontalvattenpassets (rörvattenpassets) axel är parallell med siktaxeln (se nedan). Om man har ett kompensatorinstrument, så sköter kompensatorn denna finhorisontering efter varje inriktning, så samma sak gäller här. Justering görs på samma sätt som för en teodolit, se avsnitt 5.1.2.

Horisontalvattenpassets (eller kompensatorns) axel är inte parallell med siktaxeln. Detta fel kallas *kollimationsfel*.

Inverkan av detta fel beror på avståndet mellan instrument och stång. Det elimineras genom att ha lika långt avstånd till framåtstången som till bakåtstången. Justering kan göras genom s.k. avvägning från mitten.

Ställ upp instrumentet mitt emellan två avvägningstånger med cirka 25 meter till varje stång och horisontera. Läs av framåtstången och bakåtstången. Beräkna höjdskillnaden: bakåtavläsning – framåtavläsning. Denna höjdskillnad måste vara fri från kollimationsfel eftersom vi har lika avstånd till de båda stängerna. Vi kallar denna riktiga höjdskillnad för Δh_1 . Flytta instrumentet till en plats nära bakåtstången, ungefär 2–3 meter och horisontera. Läs på nytt av bakåtstången och framåtstången. Beräkna på nytt höjdskillnaden med de senast utförda avläsningarna och vi kallar denna höjdskillnad för Δh_2 . Eftersom vi nu inte har samma siktlängder till de två stängerna kommer ett eventuellt kollimationsfel att påverka de två senaste avläsningarna. Kollimationsfelet som påverkar avläsningen mot bakåtstången som ligger nära anses försumbar och därför blir det totala kollimationsfelet, som påverkar avläsningen mot framåtstången, $k = \Delta h_1 - \Delta h_2$, dvs. skillnaden mellan de båda mätta höjdskillnaderna.

Justering görs sedan på lite olika sätt beroende på vilken typ av instrument det är. Är det ett instrument med fast kikare justerar man kollimationsfelet genom att med trådkorsets justerskruvar flytta trådkorset till det korrigerade avläsningvärdet på framåtstången. För ett kompensatorinstrument justerar man kompensatorn.

Det ovan beskrivna gäller även för ett elektroniskt avvägningssinstrument men där kan t.ex. kollimationsfelet mätas upp och lagras i instrumentet så att alla vidare mätningar kan kompenseras automatiskt. Det är dock viktigt att ofta mäta upp felet så att ”rätt” korrektion görs.

Förutom att avvägningssinstrumentet måste vara kontrollerat och justerat gäller detsamma för all annan kringutrustning som t.ex. avvägningstångerna.

5.4.3 Laserinstrument

Avvägning kan också göras med en *planlaser*, som även benämns *laserplangivare* eller *byggglaser*, (Figur 5.25). Instrumentet sänder ut en horisontell laserstråle som roterar runt instrumentets vertikalaxel. Det horisontalplan som strålen bildar kan ses som en horisontell linje där den projiceras, t.ex. på en avvägningstång, eller detekteras med en lasermottagare.



Figur 5.25. En planlaser och en lasermottagare.

Instrumentet används framförallt vid utsättning i bygg- och anläggningsbranschen, t.ex. på en byggarbetsplats där instrumentet genererar en referenshöjd som kan användas för höjdsättning av flera samtidigt användare. Lasermottagare kan även monteras på maskiner, för guidning eller styrning. På en del instrument går det också att ställa in laserplanet vertikalt eller i valfri lutning (fall), i en eller två riktningar.

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021.

Tack till: Tomas Egeltoft för att ditt kompendium fått användas som grund till detta kapitel. /Bengt Andersson

Lästips: Instrumenttillverkarnas handböcker.

Bilagorna om ”Kontroll och justering av geodetiska mätinstrument” i HMK-dokumenterna.

6 Terrestra mätmetoder

Geodetisk mätning kan delas in på flera sätt. Den mest grundläggande indelningen är:

- *Planmätning*: Bestämning av ett objekts horisontella läge m.h.a. *koordinater* (N och E) i ett plant *koordinatsystem*, t.ex. SWEREF 99 TM (se avsnitt 4.2.3).
- *Höjdmätning*: Bestämning av läget i vertikalled m.h.a. *höjder över geoiden* (H) i ett *höjdsystem*, t.ex. RH 2000 (se avsnitt 4.4.2).

Teknikområdet kan även delas in efter hur själva mätningen går till enligt:

- *Terrester mätning*: Mätning utförd på marken med teodolit/längdmätare, totalstation och avvägningsinstrument, se kapitel 0.
- *Satellitmätning*: Satellitpositionering med hjälp av GNSS-mottagare, se kapitel 10–0.

Mätningar kan också delas in utifrån syftet med dem. Två vanliga begrepp är där:

- *Stommätning*: Mätning som syftar till bestämning av koordinater/höjder för stompunkter (referenspunkter), dvs. punkter som definierar själva referenssystemet och utnyttjas för framtida mätningar (jfr avsnitt 4.1).
- *Detalj mätning*: Mätning som syftar till bestämning av koordinater/höjder för fysiska objekt, som t.ex. hushörn och fastighetsgränser. Detalj mätning utgår vanligen från stompunkter.

Detalj mätningen kan i sin tur delas in i:

- *Inmätning*: Syftar till att bestämma koordinater/höjder för ett fysiskt objekt.
- *Utsättning*: Syftar till att markera en punkt i verkligheten vars koordinater/höjder är kända. Detta kan t.ex. vara att koordinaterna för ett hus är kända från en planritning och att dessa koordinater markeras på marken.

I detta kapitel beskrivs de vanligaste metoderna för *terrester mätning*. Inriktningen är mot detalj mätning. Därför är hanteringen, och beskrivningen av den, delvis förenklad. Stommätning ställer i vissa avseenden högre krav på mätning och beräkning. Majoriteten av de metoder som beskrivs kan användas både för inmätning och för utsättning.

6.1 Grundläggande mätstorheter

6.1.1 Koordinatsystem

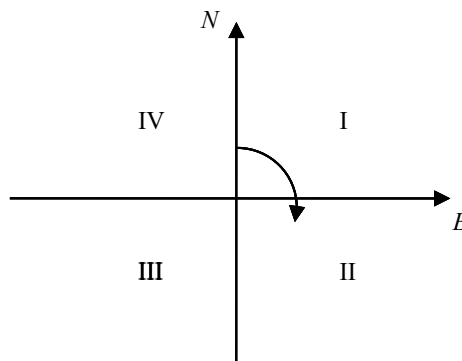
Det geodetiska koordinatsystemet skiljer sig från det matematiska. Omloppsriktningen, numreringen av kvadranterna och benämningen på koordinaterna är olika. Tidigare benämndes även de geodetiska koordinaterna x och y – fast omkastade i förhållande till de matematiska, med x -axeln norrut och y -axeln österut. I Sverige betecknas koordinaterna inom geodesin numera med (jfr Figur 3.1):

$N = \text{Northing}$, dvs. norr (uppåt)

$E = \text{Easting}$, dvs. öster (åt höger)

även fast man för de äldre systemen ibland fortfarande använder x och y , t.ex. för RT 90. I detta kompendium kommer vi konsekvent att använda N och E enligt ovan. I

Figur 6.1 framgår koordinatsystemets egenskaper.



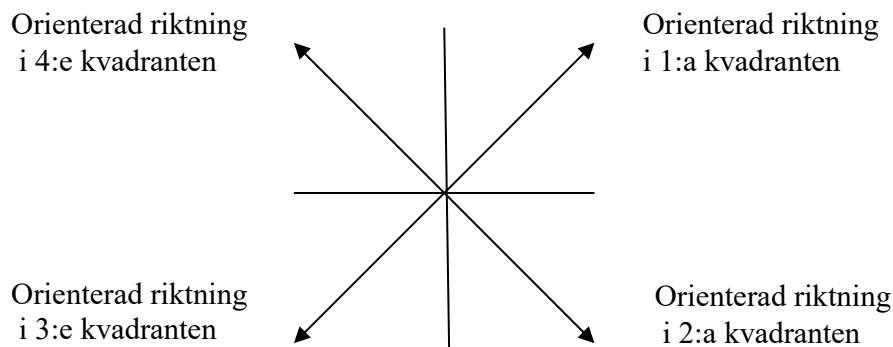
Figur 6.1. Det geodetiska koordinatsystemet. Omloppsriktningen är medurs, utgående från N-axeln. I, II, III, IV är de fyra kvadranterna. Vinklar och riktningar mäts i gon (2π radianer = $360^\circ = 400$ gon). N (primäraxeln) benämndes tidigare x och E (sekundäraxeln) benämndes y.

6.1.2 Orienterad riktning (bäring) och avstånd

En *orienterad riktning* – även benämnd *bäring* – motsvarar ”kompassriktningen” i det geodetiska koordinatsystemet. Den orienterade riktningen **från** punkt A (med koordinaterna N_A, E_A) **till** punkt B (med koordinaterna N_B, E_B) beräknas med den generella formeln (kom ihåg att ställa in miniräknaren på gon):

$$\varphi_{AB} = \arctan\left(\frac{E_B - E_A}{N_B - N_A}\right) = \arctan\left(\frac{\Delta E}{\Delta N}\right) \quad 6.1$$

Eftersom den inversa tangensfunktionen är definierad med en värdemängd från -100 till $+100$ gon (dvs. den levererar alltid orienterade riktningar i detta intervall), måste man hålla reda på i vilken kvadrant den orienterade riktningen ligger, se Figur 6.2, och korrigera resultatet av beräkningen i enlighet med Tabell 6.1.



Figur 6.2. Orienterade riktningar i olika kvadranter.

Tabell 6.1. Korrigering av beräknad orienterad riktning. För att få korrekt värde måste tecknen på ΔE och ΔN studeras och beräkningen korrigeras enligt tabellen.

$\Delta E / \Delta N$	Kvadrant	φ (gon)	Korrekt orienterad riktning
+/+	I	$0 \leq \varphi < 100$	Beräknad
+/-	II	$100 < \varphi \leq 200$	Beräknad + 200 gon
-/-	III	$200 < \varphi < 300$	Beräknad + 200 gon
-/+	IV	$300 < \varphi < 400$	Beräknad + 400 gon

Kapitel 6: Terrestra mätmetoder

Observera att ordningsföljden mellan punkterna A och B är väsentlig. φ_{AB} går från A till B medan φ_{BA} går i motsatt riktning, dvs.

$$\varphi_{AB} = \varphi_{BA} \pm 200\text{gon} \quad 6.2$$

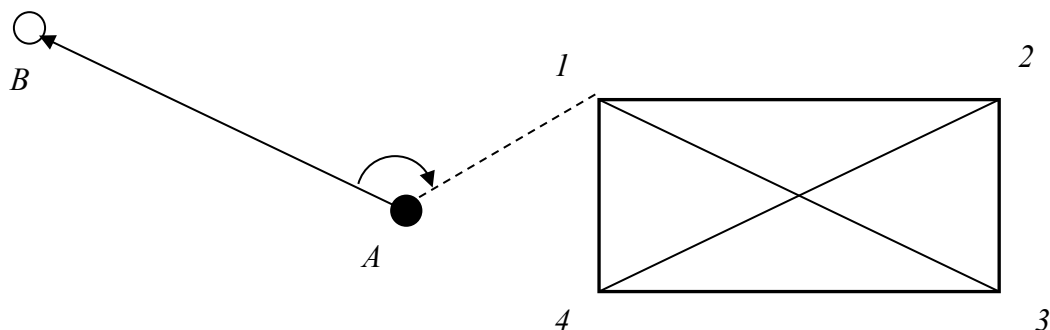
där tecknet framför 200 gon väljs så att φ_{AB} hamnar i intervallet 0–400 gon. Det gäller för övrigt generellt att alla vinklar och riktningar ska vara i detta intervall. Så snart detta av någon anledning inte är fallet, får man addera eller subtrahera ett antal 400 gon, vilket motsvarar rotation ett antal hela varv.

Beräkningen av *avstånd* ur koordinater är mer ”rakt på”. Avståndet mellan A och B ges (enligt Pythagoras sats) av:

$$d_{AB} = \sqrt{(N_B - N_A)^2 + (E_B - E_A)^2} = \sqrt{\Delta N^2 + \Delta E^2} \quad 6.3$$

Här har naturligtvis inte ordningsföljden mellan A och B någon betydelse, men det kan vara praktiskt att ha samma konvention för ΔN och ΔE som vid beräkning av orienterade riktningar.

Exempel 6.1: Inför en polär utsättning (se avsnitt 6.2.1) ska orienterade riktningar och avstånd från stationspunkten A till hushörnen 1, 2, 3, och 4 samt till bakåtojektet B beräknas. Beräkna även husets diagonaler.



Koordinatlista:

Punkt	N (meter)	E (meter)	Punkt	N (meter)	E (meter)	Punkt	N (meter)	E (meter)
A	1000,000	1000,000	1	1012,000	1020,000	3	992,000	1060,000
B	1022,000	960,000	2	1012,000	1060,000	4	992,000	1020,000

Lösning: Vi beräknar först ΔN och ΔE

Från	Till	$\Delta N = N_{Till} - N_{Från}$	$\Delta E = E_{Till} - E_{Från}$
A	B	22,000	-40,000
A	1	12,000	20,000
A	2	12,000	60,000
A	3	-8,000	60,000
A	4	-8,000	20,000

Sedan tillämpar vi formlerna för orienterad riktning (7.1) och avstånd (7.3). Beräknade riktningar korrigeras beroende på vilken kvadrant de ligger i (tecknen på ΔN och ΔE enligt Figur 6.2).

Från	Till	Orienterad riktning, beräknad (gon)	Kvadrant	Orienterad riktning, korrigerad (gon)	Avstånd (meter)
A	B	-67,988	IV	332,012	45,65
A	1	65,596	I	65,596	23,32
A	2	87,433	I	87,433	61,19
A	3	-91,562	II	108,438	60,53
A	4	-75,776	II	124,224	21,54

Diagonalerna blir $d_{13} = d_{24} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44,72$ meter.

I sanningens namn ska sägas att de flesta miniräknare har färdiga funktioner för omräkning mellan *rektangulära koordinater* och *polära koordinater*, dvs. från ΔN och ΔE till orienterad riktning och avstånd. (Även den omvända funktionen finns.) Det är dock lätt att göra fel om man inte har ovanstående principer klara för sig. Det rekommenderas att man ritat en skiss där punkterna ligger ungefärligt rätt i förhållande till varandra. Det brukar underlätta rimlighetskontrollen.

6.1.3 Horisontalvinkelmätning

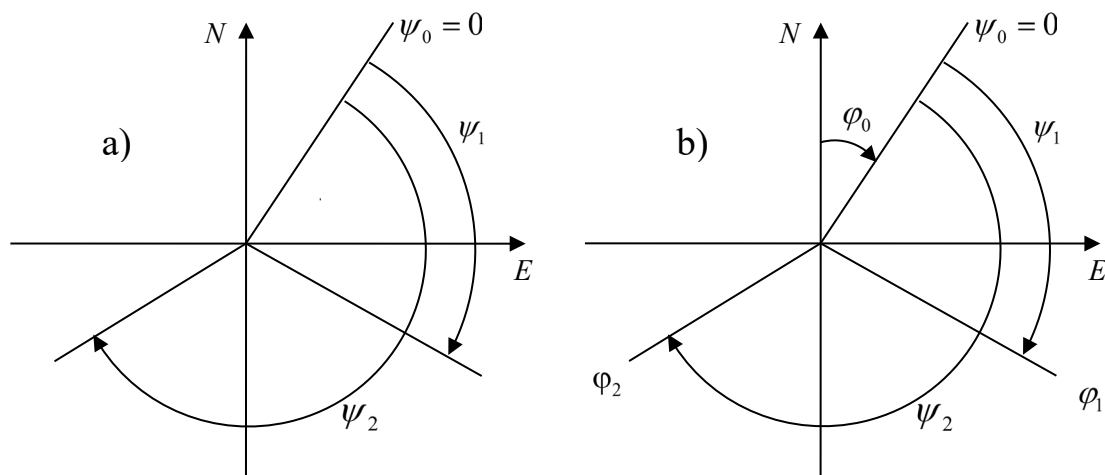
Alla mätoperationer som utförs med en teodolit brukar benämnas *vinkelmätning*; i horisontalplanet alltså *horisontalvinkelmätning*. Fast – som redan framhållits i avsnitt 5.1.1 – så är det egentligen riktningar man mäter, och en *vinkel* är inget annat än differensen mellan två *mätta riktningar*. Därför är termen *horisontalriktningsmätning* mer korrekt.

Till skillnad mot en **orienterad** riktning så är en **mätt** horisontalriktning inte relaterad till koordinatsystemet. "Nollan" på teodolitens horisontalskala är godtyckligt orienterad, se Figur 6.3a. Men om man bestämmer nollpunktens *orienteringsvinkel* (äldre synonym: *orienteringskvantitet*) så kan de mätta riktningarna orienteras, se Figur 6.3b. Det sker via sambandet:

$$\varphi_i = \varphi_0 + \psi_i \quad 6.4$$

där φ_i är orienterad riktning för objekt nr i , φ_0 är nollpunktens orienteringsvinkel och ψ_i är mätt riktning mot objekt i . Vinklar kan dock beräknas direkt ur de mätta riktningarna utan att horisontalskalan orienteras:

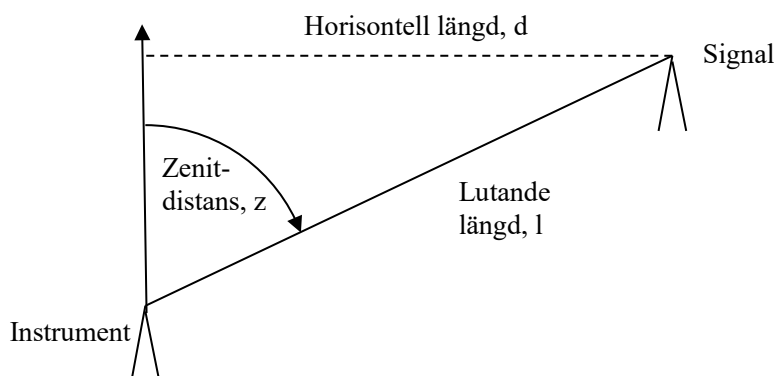
$$\beta_{ij} = \varphi_j - \varphi_i = (\varphi_0 + \psi_j) - (\varphi_0 + \psi_i) = \psi_j - \psi_i \quad 6.5$$



Figur 6.3. Förhållandet mellan mätta och orienterade riktningar. a) visar mätta riktningar med godtyckligt orienterad nollpunkt. I b) har orienteringsvinkeln φ_0 för horisontalskalans nollpunkt bestämts, så att mätta riktningar kan omvandlas till orienterade dito, enligt ekv. 6.4.

6.1.4 Vertikalvinkelmätning och dess tillämpning

Vertikalvinkelmätning – vinkelmätning i vertikalplanet – används i huvudsak för horisontering av mätta lutande längder och beräkning av höjdskillnader. Här är termen ”vinkelmätning” helt korrekt eftersom man utgår från en fast nollpunkt – vanligen *zenit*, dvs. ”rakt upp” (se avsnitt 5.1.1). Därför är *zenitdistans* en vanlig synonym till vertikalvinkel.



Figur 6.4. Bestämning av horisontell längd ur mätt, lutande längd och zenitdistans.

Enkel geometri i Figur 6.4 ger formeln för den *horisontella längden* d (=avståndet) mellan station och signal som:

$$d = l \sin z \quad 6.6$$

där l är den mätta lutande längden och z är zenitdistansen. Bestämning av höjdskillnader ur vertikalvinkelmätningar kallas för trigonometrisk höjdmätning vilket beskrivs i avsnitt 6.3.3.

Exempel 6.2: Beräkna avståndet mellan instrument och signal när zenitdistansen $z = 98,2345$ gon och den lutande längden $l = 102,654$ meter.

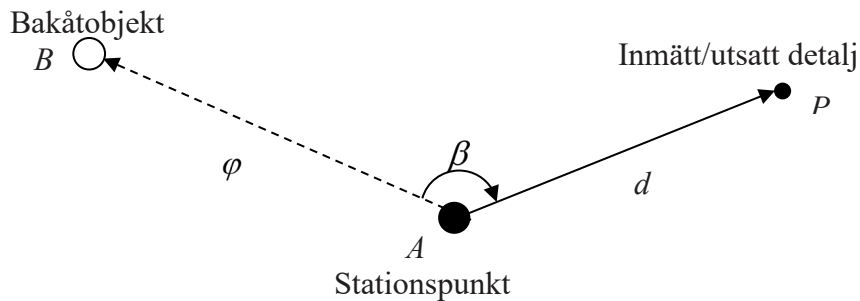
Lösning: Avståndet = den horisontella längden, och formeln 6.6 ger:

$$d = l \sin z = 102,654 \cdot \sin(98,2345) = 102,615 \text{ meter}$$

6.2 Planmätning

6.2.1 De elementära punktbestämningsmetoderna

Den vanligaste planmätningssmetoden är *polär mätning*. Vid tillämpning av denna metod mäts horisontellt avstånd (d) och horisontalvinkel (β) från en känd punkt (*stationspunkt*) mot en annan känd punkt (bakåtojekt) enligt Figur 6.5. Beräkningen utgår sedan från att den orienterade riktningen (φ) mot *bakåtojektet* är känd.



Figur 6.5. Illustration av Polär mätning.

Koordinatformlerna för den inmätta/utsatta detaljen blir:

$$\begin{aligned} N_P &= N_A + d \cos(\varphi + \beta) \\ E_P &= E_A + d \sin(\varphi + \beta) \end{aligned} \quad 6.7$$

Exempel 6.3: Bestäm objektet P polärt från stationspunkten A och den orienterade riktningen till bakåtojektet B .

Avståndet $d_{AP} = 23,324$ meter

Brytningsvinkeln $\beta_{BP} = 133,5838$ gon

Orienterade riktningen $\varphi_{AB} = 332,012$ gon

Punkt	N (meter)	E (meter)
A	1000,000	1000,000
B	1022,000	960,000

Lösning: Polärmätningens formler 6.7 ger direkt

$$N_P = 1000,000 + 23,324 \cos(332,0120 + 133,5838) = 1012,000 \text{ meter}$$

$$E_P = 1000,000 + 23,324 \sin(332,0120 + 133,5838) = 1020,000 \text{ meter}$$

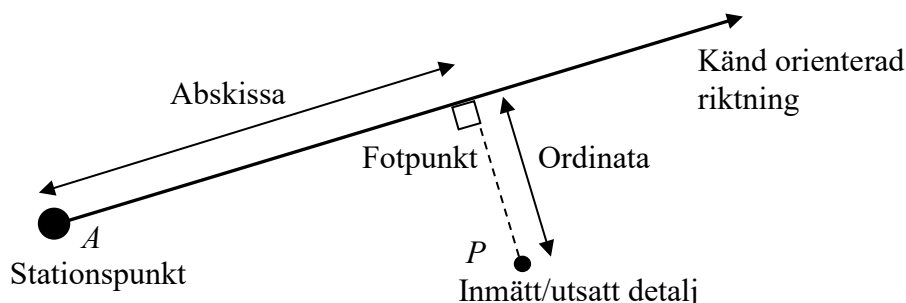
som vi känner igen som koordinaterna för hushörn nr 1 i Exempel 6.1.

Utöver polärmetoden finns ytterligare ett antal s.k. *elementära punktbestämningsmetoder* för bestämning av en *nypunkt*. Dessa är:

- *Avskärning* (orienterade riktningar från två bakåtojekt mot nypunkten)
- *Inbindning* (avstånd från nypunkten till två bakåtojekt)
- *Inskärning* (två horisontalvinklar, egentligen tre mätta riktningar, från nypunkten mot tre bakåtojekt)
- *Skärbindning* (horisontalvinkel från nypunkten mot två bakåtojekt och ett avstånd från nypunkten till något av bakåtojekten)

- *Sidoskärning* (horisontalvinkel från nypunkten mot två bakåtobjekt och en orienterad riktning från något av bakåtobjekten).

Till detta kommer *ortogonal mätning*, som kan ses som två på varandra följande polärbestämningar med en rät vinkel emellan (se Figur 6.6). Denna metod, liksom några av de övriga, kan även tillämpas vid utsättning.



Figur 6.6. Illustration av ortogonal mätning.

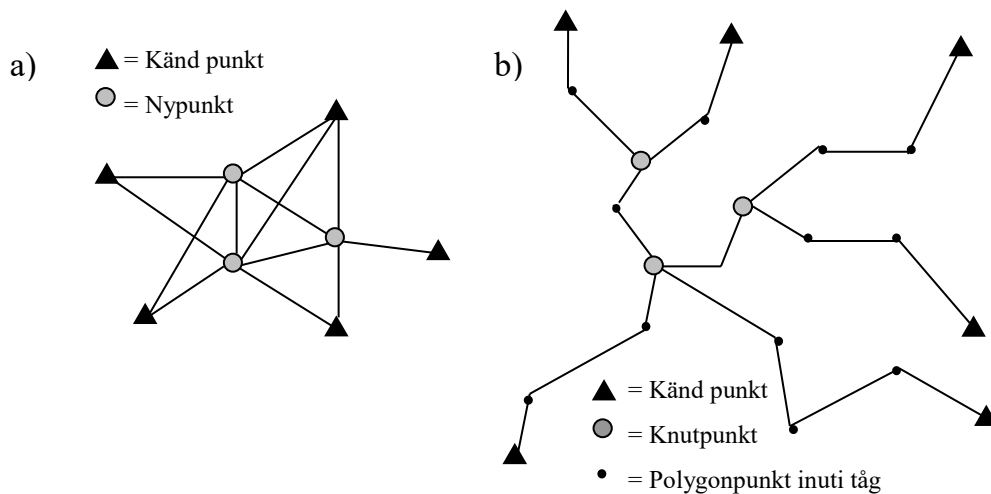
6.2.2 Plana geodetiska nät

Historiskt sett representerades ett koordinatsystem på marken av markerade punkter i ett *plant stornät*. Stornät i plan benämndes ofta efter det sätt på vilket de hade bestämts, t.ex. *triangelpunkter*, *polygonpunkter* etc.

I det dagliga arbetet utnyttjades vanligen stornät i *bruksnät*, s.k. *brukspunkter*. Bruksnäten knöts ihop och anslöts till ett överordnat nät, ett *anslutningsnät* – som dessutom ibland utgjorde länken till *riksnätet*. Denna hierarkiska indelning av stornäten är **funktionsanpassad**.

Av mättnings- och beräkningstekniska skäl fanns även en mer **produktionsanpassad** stornätsindelning. *Triangelnät* och *polygonnät* är de traditionella nättyperna för stornät i plan, se Figur 6.7. I triangelnät har varje nypunkt vanligen anknytning till minst **tre** andra punkter. I polygonnäten gäller detta endast för nätets *knutpunkter*; inuti respektive *polygontåg* har varje punkt normalt endast anknytning till de **två** närmaste. Polygonnät med långa sidor och få mellanpunkter i tågen benämndes *storpolygonnät*.

Historiskt sett har riks nätet haft triangelform, som är den starkaste nätformen och ger den lägsta osäkerheten i punktbestämningen. Bruksnäten har varit av typen polygonnät och beträffande anslutningsnäten finns exempel på alla tre nätformerna. Det finns även specialnät som t.ex. *högpunktsnät* (med markeringar på kyrkspiror och vattentorn, som syns på långt håll) och *väggpunktsnät* (med markeringar på husväggar i en tätort istället för i marken). Högpunktsnät kan vara både anslutnings- och bruksnät. Väggpunktsnät är alltid bruksnät.



Figur 6.7. Exempel på a) triangelnät och b) polygonnät.

I dag har emellertid satellittekniken (GNSS) förändrat villkoren helt, se kapitel 10–0. Dels används satellittekniken för att bestämma alla typer av plana stornät, dels har den nya tekniken i sig reducerat behovet av markerade stompunkter på marken betydligt. Det är ändå viktigt att förstå ”historiken” eftersom huvuddelen av den geografiska informationen har bestämts utifrån traditionella stornät inom den här beskrivna hierarkin.

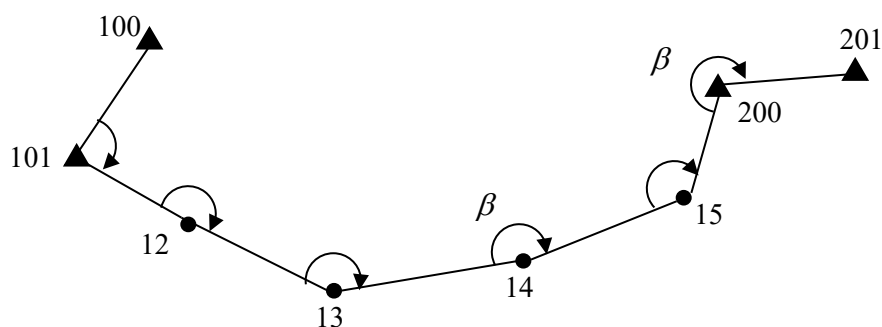
6.2.3 Beräkning av polygontåg

Polygontåg används idag inte alls lika mycket som förr, men de behövs fortfarande t.ex. för att etablera stompunkter i områden där det inte är möjligt att mäta med satellitteknik, t.ex. i stadsmiljö med höghus som hindrar sikten mot satelliterna. Vi ska nu gå igenom hur man mäter och beräknar ett enskilt polygontåg. Polygontåget ska vara varaktigt markerat för att ingå i ett bruksnät, men kan också vara enklare markerat för att bara utnyttjas till ett speciellt projekt, t.ex. för inmätning där stompunkter saknas. Detta enklare markerade tåg kallas *detaljpolygontåg*. Sättet man mäter och beräknar dessa två varianter skiljer sig ofta inte åt, men i den fortsatta beskrivningen förutsätter vi den enklare typen.

Man ska försöka få tågen så sträckta som möjligt. Dessutom bör punktavstånden vara någorlunda lika och särskilt bör man undvika mycket korta avstånd. Riktningmätningen görs vanligen i två helsatser (se avsnitt 5.1.2) och längderna dubbelmätts, dvs. de mäts en gång åt vardera hållet. Vertikalvinklar mäts också och används sedan för att räkna om de mätta lutande längderna till horisontella längder med formel 6.6, men det berör vi inte här.

Beräkningen sker enligt en standardiserad process i flera steg, som beskrivs i Exempel 6.4.

Exempel 6.4: Beräkna följande polygontåg.



Kända punkter		
Punkt nr.	N	E
100	97155,652	85905,142
101	97058,112	85883,098
200	96961,918	86272,833
201	96963,762	86448,405

Mätdata	
Brytningsvinklar (gon)	Avstånd (meter)
$\beta_1 = 129,1958$	$d_1 = 112,612$
$\beta_2 = 192,3130$	$d_2 = 91,888$
$\beta_3 = 175,7437$	$d_3 = 92,011$
$\beta_4 = 191,1585$	$d_4 = 76,010$
$\beta_5 = 156,7768$	$d_5 = 72,075$
$\beta_6 = 239,9952$	

Lösning: Se följande punkter och efterföljande beräkningsblankett.

Följande steg ingår i tågberäkningen [mätvärden och andra siffror inom klammarna refererar till beräkningsblanketten]:

- 1) Fyll i samtliga punktnummer i den ordning de förekommer i tåget. [100, 101, 12,.....]
- 2) Fyll i koordinaterna för de fyra kända punkterna (startpunkten och ett bakåtobjekt i början och slutpunkten och ett framåtobjekt i slutet).
[$N = 97\ 058,112$ m & $E = 85\ 883,098$ m för startpunkten 101; $N = 96\ 961,918$ m & $E = 86\ 272,833$ m för slutpunkten 200]
- 3) Fyll i samtliga mätningar (brytningsvinklar och horisontalade längder). Summan av sidlängder ger den sammanlagda *tåglängden*. [Första brytningsvinkeln = 129,1958 gon; första längden = 112,612 m]
- 4) Beräkna den orienterade riktningen i början och slutet av tåget – *utgångsriktningen* resp. *anslutningsriktningen*. Tänk på att riktningar alltid ska gå **framåt** i tåget. [Utgångsriktningen = 214,1499 gon; anslutningsriktningen = 99,3314 gon]
- 5) Rita en skiss över tåget, som är så ”kartriktig” som möjligt; det underlättar kontroller under beräkningarnas gång.
- 6) Summera samtliga brytningsvinklar, addera summan till utgångsriktningen och korrigerar med ett lämpligt antal multiplar av 200 gon. Skriv värdet inom parentes på raden under anslutningsriktningen. Skriv ingenting på raderna för orienterade riktningar ännu! [(99,3329 gon)].

- 7) Skillnaden mellan dessa två värden, ditt värde minus det korrekta värdet, är *vinkelslutningsfelet* f_β . [$f_\beta = 99,3329 - 99,3314 = 0,0015$ gon]
- 8) Kolla om vinkelslutningsfelet verkar rimligt; jämför med tolerans om sådan finns (t.ex. HMK).
- 9) Om allt verkar bra: Byt tecken på detta värde och dela det med antalet brytningsvinklar $v_\beta = -f_\beta / n$ så får du vinkelförbättringen. Skriv in den på raden för vinkelförbättringar framför respektive vinkel.
[$v_\beta = -0,0015 / 6 = -0,00025$ gon]
- 10) Beräkna orienterade riktningar som $\varphi_{i+1} = \varphi_i + \beta_{i,i+1} + v_\beta \pm 200\text{gon}$. Nu är det dags att skriva in dessa på raden mellan berörda punkter. Räkna ända fram till anslutningsriktningen och kontrollera att det nu blir **exakt** detta värde. [99,3314 gon]
- 11) Beräkna samtliga $\Delta N = d \cos \phi$ och $\Delta E = d \sin \phi$, där d är sidlängd och ϕ är orienterad riktning. Skriv in dessa på raden mellan berörda punkter. [De första är -70,886 och 87,502]
- 12) Summera samtliga ΔN och ΔE och addera summan till respektive utgångskoordinat. Skriv värdet inom parentes på raden under slutpunktens koordinater. Skriv ingenting på raderna för koordinater ännu! [(96 961,930 m) respektive (86 272,800 m)]
- 13) Skillnaderna mellan Dina värden och anslutningspunktens korrekta koordinater ger dig *koordinatslutningsfelen* f_N respektive f_E . Beräkna även det *radiella slutningsfelet* $f_r = \sqrt{f_N^2 + f_E^2}$.
[$f_r = \sqrt{0,012^2 + (-0,033)^2} = 0,035$ m]
- 14) Kolla om slutningsfelet verkar rimligt; jämför med angiven tolerans om sådan finns (t.ex. HMK).
- 15) Beräkna i så fall *koordinatförbättringarna* $v_N = -f_N / (n-1)$ resp. $v_E = -f_E / (n-1)$, där n är antalet brytningsvinklar och $n-1$ antalet mätta längder. Skriv in dessa värden på raden för N- och E-koordinatförbättringar [$v_N = -0,012 / 5 = -0,0024$ m; $v_E = 0,033 / 5 = 0,0066$ m]
- 16) Beräkna sedan de definitiva koordinaterna som $N_{i+1} = N_i + \Delta N_{i,i+1} + v_N$ respektive $E_{i+1} = E_i + \Delta E_{i,i+1} + v_E$. Nu är det även dags att skriva in dessa på raden för den punkt värdena avser. Räkna ända fram till slutpunkten och kontrollera att det nu blir **exakt** dessa N- och E-värden.
[96 961,918 m resp. 86 272,833 m]
- 17) Nu är det klart!

Kapitel 6: Terrestra mätmetoder

Punkt	Mätt vinkel (gon)	Vinkelför- bättring(gon)	Sidlängd (m)	ΔN (m)	ΔE (m)	N- förbättring. (m)
	Orienterad riktning (gon)			N (m)	E (m)	E- förbättring (m)
100				97 155,652	85 905,142	
	214,1499					
101	129,1958	-0,0002		97 058,112	85 883,098	
	143,3455		112,612	-70,886	87,502	-0,002
12	192,3130	-0,0003		96 987,224	85 970,607	0,007
	135,6582		91,888	-48,819	77,847	-0,003
13	175,7437	-0,0002		96 938,402	86 048,460	0,006
	111,4017		92,011	-16,391	90,539	-0,002
14	191,1585	-0,0003		96 922,009	86 139,006	0,007
	102,5599		76,010	-3,056	75,949	-0,003
15	156,7768	-0,0002		96 918,950	86 214,961	0,006
	59,3365		72,075	42,970	57,865	-0,002
200	239,9952	-0,0003		96 961,918	86 272,833	0,007
	99,3314			(96 961,930)	(86 272,800)	
201	(99,3329)			96 963,762	86 448,405	
	$f_{\beta} = 0,0015$		444,596 (Tåglängd)	$f_N = 0,012$	$f_E = -0,033$ $f_r = 0,035$	
	$v_{\beta} = -0,00025$			$v_N = -0,0024$	$v_E = 0,0066$	

Ett litet förtydligande till punkt 6 och 10 i Exempel 6.4. Anledningen till korrektionen ± 200 gon i punkt 10 beskrivs i Figur 6.8. Vid summeringen i punkt 6 måste lika många sådana korrektioner göras som det finns brytningsvinklar i tåget.



Figur 6.8. Beräkning av orienterad riktning i polygontåg. I a) kan inte brytningsvinkeln adderas eftersom den orienterade riktningen "pekar åt fel håll". I b) har riktningen vänts, dvs. korrigerats med ± 200 gon, vilket gör additionen möjlig (jfr formel 6.2).

Det finns flera varianter av denna beräkningsmetod. Här har t.ex. koordinat-slutningsfelen delats lika mellan samtliga koordinatdifferenser – på samma sätt som för vinklar. Traditionellt har man ofta satt koordinatförbättringarna proportionella mot respektive sidlängder (jfr Exempel 6.6 och formel 6.9), men eftersom beräkningsmetoden i sig är en approximation är det enklare att fördela förbättringarna lika. Egentligen bör vinkel- och koordinat-slutningsfelen beräknas i ett sammanhang och inte i två steg. För att göra detta krävs mer avancerade beräkningsmetoder, vilka beskrivs i kapitel 9.

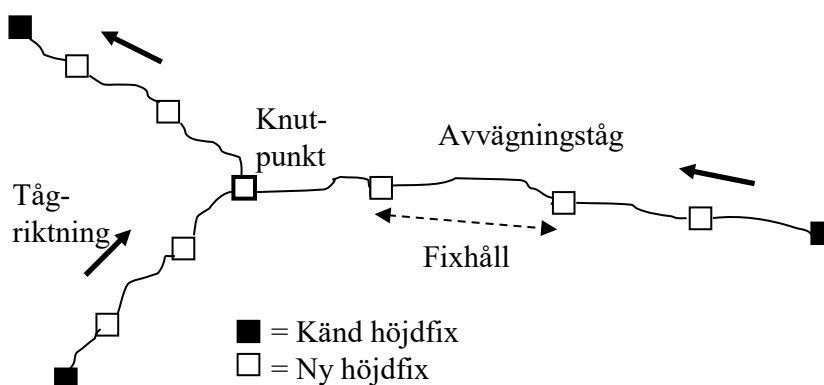
6.3 Höjdmätning

Det traditionella sättet att bestämma höjdskillnader är genom avvägning, men trigonometrisk höjdmätning är också vanlig idag. Dessa två metoder beskrivs i detta avsnitt. Också satellittekniken är användbar när gäller höjdmätning och är ett bra och effektivt alternativ till avvägning för många tillämpningar (se kapitel 10-0).

6.3.1 Geodetiska höjdnät

Ett höjdsystem representeras på marken av markerade punkter som ingår i ett *höjdnät*; ett *stomnät i höjd*. Höjdstompunkter brukar benämnas *fixpunkter* eller *höjdfixar*. Höjdnäten har samma hierarkiska indelning som de plana näten: riksnät, anslutningsnät, bruksnät. För inmätning av stomnät i höjd tillämpas vanligen *höjdtågsnät*, t.ex. *avvägningsnät*, men även *trigonometriska höjdnät* förekommer.

Ett avvägningssnät består av ett antal *avvägningståg*, som går mellan knutpunkter eller kända punkter (se Figur 6.9). Utefter tågen finns vanligen en eller flera höjdfixar. En delsträcka mellan två fixar benämns *fixhåll*. All avvägning har en *mät-* eller *tågriktning* som bestämmer tecknet på höjdskillnaden.



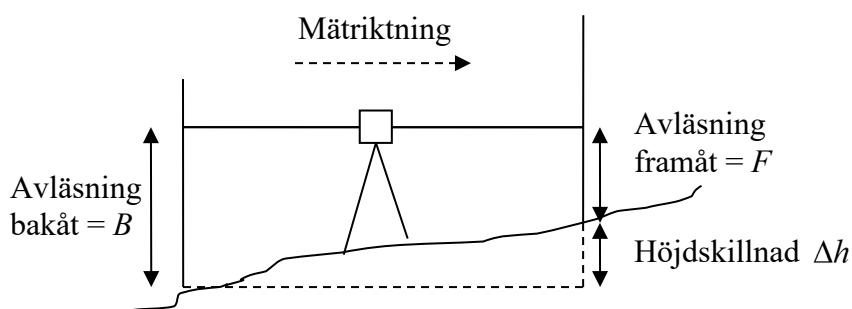
Figur 6.9. Del av ett avvägningsnät.

Ett trigonometriskt höjdnät mäts med trigonometrisk höjdmätning. Det har fri sikt mellan samtliga punkter och har en nätstruktur snarlik ett triangelnät (jfr Figur 6.7a).

6.3.2 Avvägning

Avvägning utförs med hjälp av avvägningsinstrument, som har en horisontell siktaxel (se avsnitt 5.4). Höjdskillnaden bestäms genom att två avvägningsstänger ställs upp på de berörda punkterna, med avvägningsinstrumentet mitt emellan. I instrumentet läser man först av den bakre stängens värde på skalan och därefter den främre stängens värde. Figur 6.10 – och även Figur 5.17 – ger direkt avvägningens grundsamband ”bakåt minus framåt”, dvs.

$$B = F + \Delta h \Leftrightarrow \Delta h = B - F \quad 6.8$$



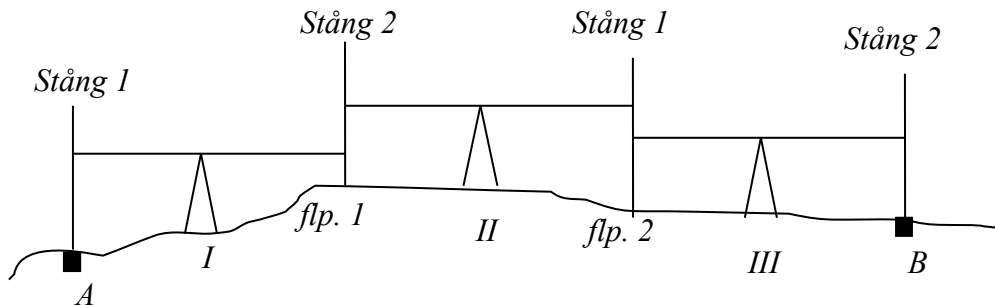
Figur 6.10. Grundprincipen vid avvägning.

Genom successiva mätningar på detta sätt kan man med mycket liten mätosäkerhet bestämma höjdskillnader mellan ytterligare punkter och över längre avstånd, se Figur 6.11.

Avståndet mellan fixpunkter i ett höjdnät brukar vara ungefär av storleksordningen 500 m–1 km. Detta är en alltför lång sträcka att mäta med avvägning i en uppställning, avståndet mellan bakåt- och framåt punkterna i en uppställning bör vara maximalt 100 m. För att uppnå detta introduceras *flyttpunkter* (*flp.* i Figur 6.11). Avvägningarna sker således från en fixpunkt via ett antal flyttpunkter och avslutas i nästa fixpunkt i nätet. Flyttpunkterna är inte markerade på marken, däremot lägger man ut *paddor* på flyttpunkterna för att minimera vertikala rörelser under mätningarna. Paddan är en bärbar, relativt tung metallplatta med dubbar under och en rund dubb ovanpå. Den trampas ned ordentligt i underlaget och sedan placeras stängen på den runda dubben.

Grundutrustningen vid avvägning blir sammantaget: ett avvägningssinstrument, två avvägningstångar och två paddor, vilket kräver tre personer som mäter. Vid vanlig ”vardagsavvägning” (standardavvägning) används ofta avvägningstångar av trä med cm- eller mm-gradering direkt på träet. Vid finavvägning eller precisionsavvägning används invarstångar (jfr Figur 5.21).

Mätsekvensen ser ut som följer (se Figur 6.11). Stång 1 ställs upp på fixen A och stång 2 på flyttpunkt 1. Instrumentet placeras mittemellan (läge I). Efter mätning flyttas stång 1 till flyttpunkt 2, stång 2 står kvar och instrumentet placeras i läge II. Efter mätning placeras slutligen stång 2 på fixen B, stång 1 står kvar och instrumentet placeras i läge III. Denna mätning avslutar fixhållet.



Figur 6.11. Mätning av ett fixhåll, A till B, med tre uppställningar och två flyttpunkter (flp).

Exempel 6.5: En mätning mellan punkterna 1021 och 1022, A respektive B i Figur 6.11, kan ha följande utseende i ett avvägningsprotokoll.

Från	Till	Bakåt (B) (m)	Framåt (F) (m)	d_B (m)	d_F (m)	Δh (m)	ΔH (m)	H (m)
1021	Flp. 1	1,523	1,702	21	21	-0,179	1,959	25,354
Flp. 1	Flp. 2	1,862	0,517	23	22	1,345		
Flp.2	1022	1,796	1,003	29	29	0,793		27,313
				$\Sigma=73$	$\Sigma=72$	$\Sigma=1,959$		

I bakåt- och framåtkolumnen skriver vi avläsningarna mot respektive stång. I kolumnen d_B och d_F skriver vi avståndet mellan instrumentet och bakåt- resp. framåtstången. Δh är höjdskillnaden för varje uppställning, dvs. $\Delta h_i = B_i - F_i$ (formel 6.8). För första uppställningen I är $\Delta h_I = B_I - F_I = 1,523 - 1,702 = -0,179$ m. ΔH är den totala sträckans höjdskillnad, $\Delta H = \Sigma \Delta h_i = 1,959$ m.

Observera höjdskillnadernas tecken; positiv höjdskillnad betyder att det lutar uppåt, negativ höjdskillnad att det lutar nedåt. Om man känner höjden på 1021 kan höjden på 1022 beräknas, och i exemplet ovan är denna: $H_{1022} = H_{1021} + \Delta H = 25,354 + 1,959 = 27,313$ m.

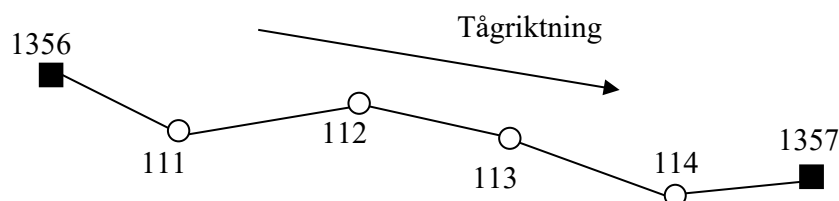
Avstånden d_B och d_F används dels för att kontrollera att instrumentet står ungefär mitt emellan stängerna, dels för att mäta avvägningsträckans totala längd. Avståndet kan mätas genom *optisk distansmätning*, som sker m.h.a. särskilda distanstrådar på avvägningssinstrumentets hårkors (se Figur 5.18 och avsnitt 5.4.1). I exemplet är det totala avståndet bakåt och framåt i stort sett lika (73 respektive 72 meter) och det totala avståndet mellan fixarna är 145 meter. •

Kapitel 6: Terrestra mätmetoder

För att kontrollera mätningarna kan man avväga samma sträcka två gånger, ofta i motsatt riktning. Detta kallas *dubbelavvägning*. Då erhålls två värden på sträckans höjdskillnad (med motsatt tecken), vilket ger en bra kontroll av att man inte gjort något grovt fel som t.ex. en felavläsning (kan mycket lätt ske vid avvägning). Dessutom får man ett lite bättre resultat genom att bilda medelvärde av de två höjdskillnaderna. .

Vi ska nu gå igenom hur man utjämnar ett avvägningståg. Även denna gång utgår vi från ett praktiskt exempel.

Exempel 6.6: Beräkna följande avvägningståg.



Kända höjder	
1356	26,456 m
1357	35,286 m

Mätdata			
Från	Till	Höjdskillnad (m)	Avstånd (m)
1356	111	3,538	86,5
111	112	2,583	132,5
112	113	-1,997	101
113	114	-1,521	103,5
114	1357	6,236	81

Lösning: Se beräkningsblanketten och processbeskrivningen nedan.

	Mätt ΔH (m)	Avstånd (m)	Förbättringar	Utjämnad ΔH	Höjd (m)	Anm.
1356					26,456	Utgångspkt
111	3,538	86,5	-0,002	3,536	29,992	Nypunkt
112	2,583	132,5	-0,002	2,581	32,573	-"-
113	-1,997	101	-0,002	-1,999	30,574	-"-
114	-1,521	103,5	-0,002	-1,523	29,051	-"-
1357	6,236	81	-0,001	6,235	35,286	Anslutn.pkt
	$\Sigma \Delta H = 8,839$	$\Sigma d = 504,5$	$\Sigma v = -0,009$		(35,295)	
					$f_H = 0,009$	

Tillvägagångssättet är analogt som vid polygontågsberäkning. Följande moment ingår:

- 1) Fyll i samtliga punktnummer i den ordning de förekommer i tåget. [**1356**, 111,112...]
- 2) Fyll i höjderna för de två kända punkterna (utgångshöjden och

anslutningshöjden). [Utgångshöjden $H=26,456$ m för startpunkten **1356**; anslutningshöjden $H=35,286$ m för slutpunkten **1357**]

- 3) Fyll i samtliga mätningar för varje fixhåll under rubriken ”Mätt ΔH ”. Höjdskillnaden skrivs på den rad som motsvarar slutpunktens nummer. [Första höjdskillnaden, 3,538 mellan punkterna **1356** och 111, skrivs på samma rad som punkt 111]
- 4) Avståndet för fixhållet skrivs på samma rad som höjdskillnaden, men under rubriken ”Avstånd”. [86,5 m för fixhållet **1356-111**]
- 5) Summera samtliga höjdskillnader och avstånd. [$\Sigma\Delta H = 8,839$ m; $\Sigma d = 504,5$ m]
- 6) Beräkna höjden för anslutningspunkten som Utgångshöjd + $\Sigma\Delta H$ och skriv inom parentes under den kända anslutningshöjden. [$26,456 + 8,839 = (35,295$ m)]
- 7) Skillnaden mellan Ditt beräknade värde och den kända anslutningshöjden ger *höjdslutningsfelet* f_H . [$f_H = 32,295 - 32,286 = 0,009$ m]
- 8) Kolla om höjdslutningsfelet verkar rimligt; jämför med tolerans om sådan finns (t.ex. HMK).
- 9) Om allt verkar bra: Byt tecken på detta värde och fördela det proportionellt mot avståndet för varje fixhåll, dvs. förbättringarna blir

$$v_i = -\frac{d_i f_H}{\Sigma d} \quad 6.9$$

Skriv in resp. värde under rubriken ”Förbättringar” på den rad som motsvarar aktuell höjdskillnad. [$v_1 = 86,5 * (-0,009) / 504,5 = -0,0015 \approx -0,002$ m]

- 10) Kontrollera att $\Sigma v = -f_H$.
- 11) Beräkna och skriv in ”Utjämnad ΔH ” (= ”Mätt ΔH ” + ”Förbättring”). [Det första värdet blir $3,538 - 0,002 = 3,536$ m]
- 12) Beräkna och skriv in definitiva höjder för nypunkterna (Utgångshöjd + Σ ”Utjämnad ΔH ” fram t.o.m. aktuell punkt). [Punkt 112:s höjd blir $26,456 + 3,536 + 2,581 = 32,573$ m]
- 13) Kontrollera att höjden på anslutningspunkten får **exakt** rätt värde. [35,286 m]
- 14) Nu är det klart!

Observera att beräkningen av förbättringarna ”omvänt proportionellt mot fixhållets avstånd” är teoretiskt motiverad vid avvägning. Här blir det dock ingen större skillnad på förbättringarna eftersom skillnaden i avstånd mellan fixhållen är ganska liten.

6.3.3 Trigonometrisk höjdmätning

Vid trigonometrisk höjdmätning bestäms höjdskillnader genom mätning av lutande längd och vertikalvinkel (zenitdistans), jfr avsnitt 6.1.4 och Figur 6.4. Fördelen med metoden är att den går snabbare än traditionell avvägning och att man kan använda samma instrument (totalstation) till både planmätning och höjdmätning.

Figur 6.12 ger direkt ett uttryck för höjdskillnaden mellan de markerade punkterna A och B (ΔH_{AB}), som instrumentet respektive signalen är uppställda över:

Kapitel 6: Terrestra mätmetoder

$$\begin{aligned}
 H_B &= H_A + h_i + \Delta h - h_s = H_A + (h_i - h_s) + l \cos z \Leftrightarrow \\
 \Delta H_{AB} &= H_B - H_A = (h_i - h_s) + l \cos z
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

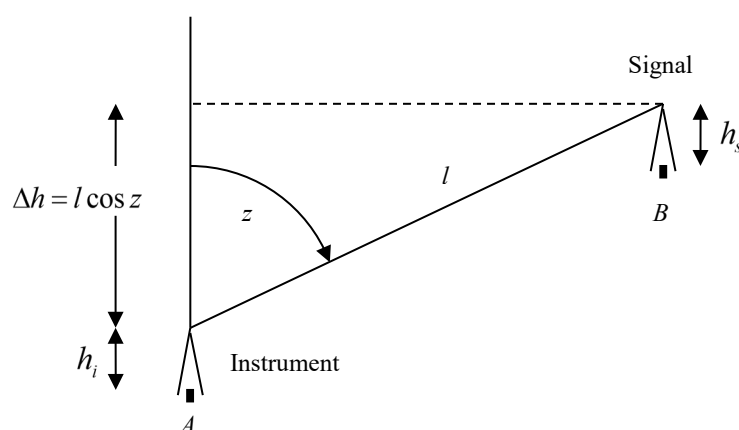
där h_i och h_s är instrumentets resp. signalens höjd över markeringarna A och B .

Exempel 6.7: (Fortsättning på Exempel 6.1) Beräkna höjdskillnaden från stationspunktens markering till signalens markering om instrumenthöjden $h_i = 1,703$ meter, signalhöjden $h_s = 1,324$ meter, zenitdistansen $z = 98,2345$ gon och den lutande längden $l = 102,654$ meter.

Lösning: Formel 6.10 ger:

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A = (h_i - h_s) + l \cos z = (1,703 - 1,324) + 102,654 \cos(98,2345) = 3,225 \text{ m}$$

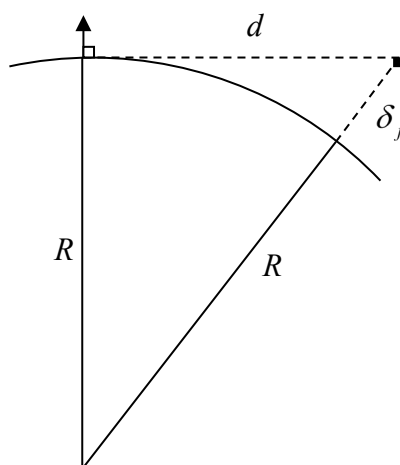
Dvs. signalmarkeringen ligger 3,225 meter **högre** än stationspunktens markering. •



Figur 6.12. Trigonometrisk höjdmätning.

Vid beräkning av trigonometrisk höjdmätning med avstånd längre än 150–200 meter bör hänsyn även tas till inverkan från *jordkrökning* och *refraktion*.

Jordkrökningseffekten innebär att objekten ser ut att vara på en lägre höjd än vad de egentligen är. I Figur 6.13 ser objektet i teodoliten ut att ligga i horisontalplanet, eftersom zenitdistansen är en rät vinkel (100 gon). Fast egentligen ligger objektet på höjden δ_j , som alltså blir jordkrökningskorrektionen.



Figur 6.13. Effekten av jordkrökningen vid trigonometrisk höjdmätning.

Ur figuren får vi m.h.a. Pythagoras sats:

$$R^2 + d^2 = (R + \delta_j)^2 = R^2 + \delta_j^2 + 2R\delta_j \quad 6.11$$

där d = avståndet och R = jordens *krökningsradie*. Eftersom R^2 -termerna tar ut varandra och δ_j^2 är ”försvinnande liten” ger detta oss följande uttryck för jordkrökningens korrektionen:

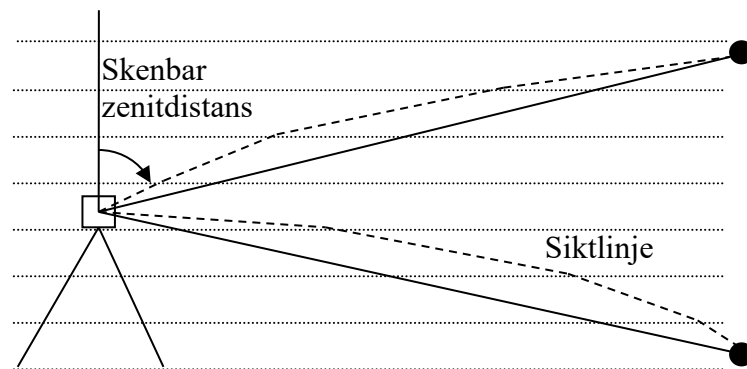
$$\delta_j = \frac{d^2}{2R} \quad 6.12$$

Refraktionen orsakas av variationer i luftlagrens täthet (högre täthet ju närmare marken man kommer). Eftersom ljuset bryts **mot** normalen när det går från lägre till högre täthet får siktlinjen den form som visas för det övre objektet i Figur 6.14. Och eftersom det bryts **från** normalen i det omvända fallet så får siktlinjen utseendet som för det nedre objektet. I båda fallen blir den uppmätta zenitdistansen för liten, dvs. höjdskillnaden blir för stor. En **negativ** korrektion krävs.

Vid normalt tryck och normal temperatur erhålls en siktlinje som approximativt är en cirkelbåge, med en radie ca 7 gånger jordens krökningsradie. Samma betraktelsesätt som för jordkrökningen ger därför refraktionskorrektionen:

$$\delta_r = -\frac{d^2}{2(7R)} = -\frac{d^2(1/7)}{2R} = -\frac{0,14d^2}{2R} \quad 6.13$$

Talet 0,14 är ett standardvärde på den s.k. *refraktionskoefficienten*, som beror på temperatur och tryck.



Figur 6.14. Effekten av refractionen vid trigonometrisk höjdmätning.

Den totala effekten av jordkrökning och refraction blir (formel 6.12 plus 6.13):

$$\delta_{jr} = \delta_j + \delta_r = \frac{d^2}{2R} - \frac{0,14d^2}{2R} = \frac{d^2(1-0,14)}{2R} \quad 6.14$$

I Tabell 6.2 visas några framräknade korrektioner för olika avstånd. Om vi inkluderar jordkrökningens- och refraktionskorrektionerna får vi följande kompletta formel för trigonometrisk höjdmätning:

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A = (h_i - h_s) + l \cos z + \frac{l^2 \sin^2 z \cdot (1-0,14)}{2R} \quad 6.15$$

där $l \sin z = d$, dvs. det horisontella avståndet.

Kapitel 6: Terrestra mätmetoder

Tabell 6.2. Effekten av jordkrökning δ_j och refraction δ_r . Refraktionskoefficienten är satt till 0,14 och jordens krökningsradie $R = 6390$ km.

Avstånd (m)	δ_j (m)	δ_r (m)	$\delta_{jr} = \delta_j + \delta_r$ (m)
100	0,0008	-0,0001	0,0007
300	0,007	-0,001	0,006
1000	0,078	-0,011	0,067
2000	0,313	-0,044	0,269
3000	0,704	-0,099	0,605

Exempel 6.8: Inför anläggning av en flygplats skulle kringliggande torn mätas in. En av inmätningarna, mot toppen av en radiomast, gav följande resultat:

zenitdistans = 99,849 gon; längd = 8000 m; instrumenthöjd = 1,70 m;
stationens höjd = 100 m

Beräkna masttoppens höjd ($R = 6390$ km).

Lösning: Formeln för trigonometrisk höjdmätning (7.15) ger masttoppens höjd H_M till:

$$H_M = H_S + (h_i - h_s) + l \cos z + \frac{l^2 \sin^2 z \cdot (1 - 0.14)}{2R}$$

⇔

$$H_M = 100 + (1,70 - 0) + 8000 \cos(99,849) + \frac{8000^2 \sin^2(99,849) \cdot 0,86}{2 \cdot 6390000} \approx 124,98 \text{ m}$$

där H_S är mätstationens höjd. Masttoppen ligger alltså på 125 meters höjd, 25 meter högre än stationspunkten. Av dessa 25 meter utgör jordkröknings- och refraktionskorrektionen 4,3 meter. Om vi inte hade gjort korrektionerna hade vi alltså fått att masthöjden var 120,7 meter. Vilka konsekvenser detta fyrametersfel skulle ha fått för flygtrafiken går det bara att sia om.

•

Ett annat sätt att förbättra metoden – i stället för att införa korrektioner – är *korresponderande trigonometrisk höjdmätning*, som innebär att man i ändpunkterna samtidigt mäter vertikalvinklarna mot varandra (den enes instrument blir den andres signal). På detta sätt kommer refractionen till stor del påverka de mätta höjdskillnaderna med omvänt tecken, vilket innebär att refractionen elimineras när medelvärde bildas.

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021.

Tack till Tomas Egeltoft, Stockholm, Stig-Göran Mårtensson, Gävle, samt Lars Ollvik och Jonas Gunnarsson, Lund. Era geodesikompendier har inspirerat mig, och jag har t.o.m. knyckt några av Era figurer och räkneexempel. Tack också till Sadegh Jamali,

Lund, för förbättring av beskrivning av polygontåg i 2021-års version. En tanke också till min eviga inspirationskälla, Professor Emeritus Arne Bjerhammar, i salig åminnelse. / Clas-Göran Persson

Lästips: Modern svenskspråkig litteratur saknas i stort sett helt inom detta område; det är ju huvudanledningen till att kompendiet har tagits fram. Detta kapitel baseras till stor del på tidigare böcker och kompendier från KTH och Lund, som nu utmönstras. På Högskolan i Gävle har Stig-Göran Mårtenson tagit fram ett kompletterande kompendium, speciellt för deras kurser i mätningsteknik.

7 Detaljmätning

Till *detalj*mätning räknas såväl inmätning som utsättning (se inledningen på kapitel 6). Vid *inmätning* bestäms detaljers lägen. Vid *utsättning* överförs givna punktlägen till terrängen. De är alltså varandras omvändning, men en gemensam beskrivning motiveras av att likheterna är större än skillnaderna.

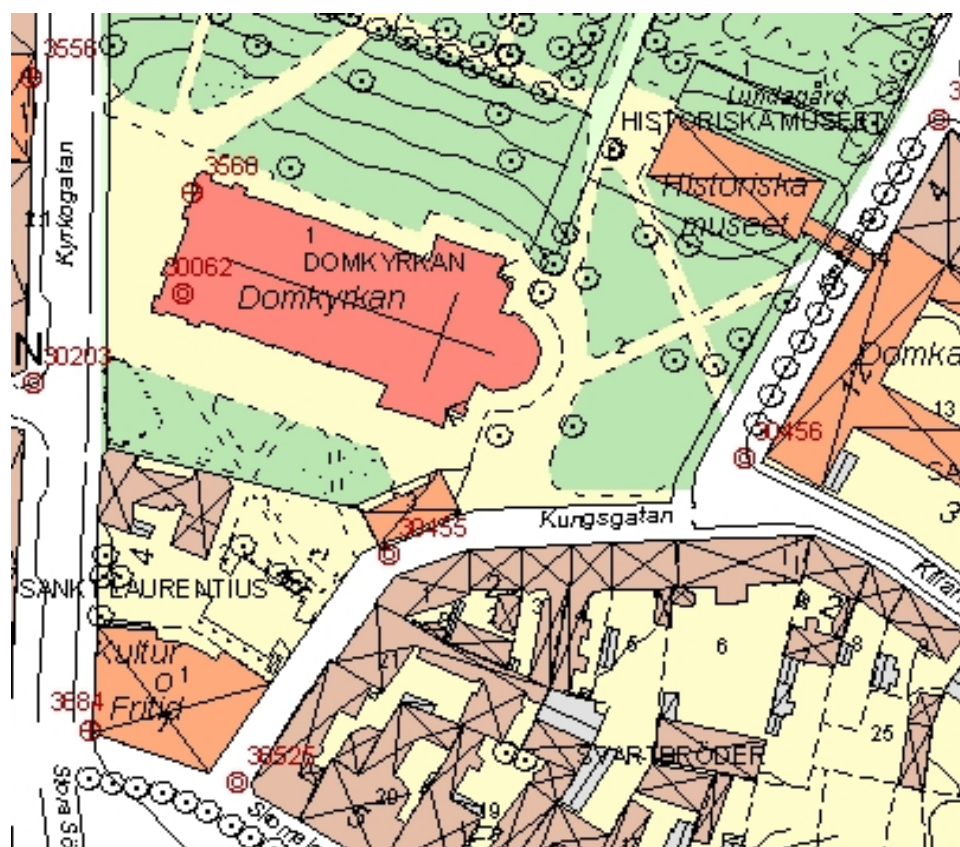
I detta kapitel behandlas terrester detaljmätning, dvs. sådan mätning som utförs på marken med konventionella geodetiska metoder och instrument. Alternativa metoder är fotogrammetrisk detaljmätning och mätning med satellitteknik (GPS/GNSS), se kapitel 10–0.

Den terrestra detaljmätningen är i dag mindre vanlig än förut, men i flertalet tillämpningar försvarar den fortfarande sin plats. Även ur pedagogisk synvinkel känns det naturligt att lägga grunden för all detaljmätning genom en presentation av den terrestra, ursprungliga tekniken.

7.1 Tillämpningar

De viktigaste tillämpningsområdena för detaljmätning är *kommunalteknik*, *fastighetsbildning* samt *bygg- och anläggningsverksamhet*.

Den kommunala mätningstekniska verksamheten kan delas upp i *basverksamhet* och *ärendeverksamhet*. Till basverksamheten hör upprättande av storskaliga kartverk, t.ex. *primärkartor*. Detta förutsätter att det finns stamnät, varför även stamnätsarbete inkluderas i den kommunala basverksamheten.



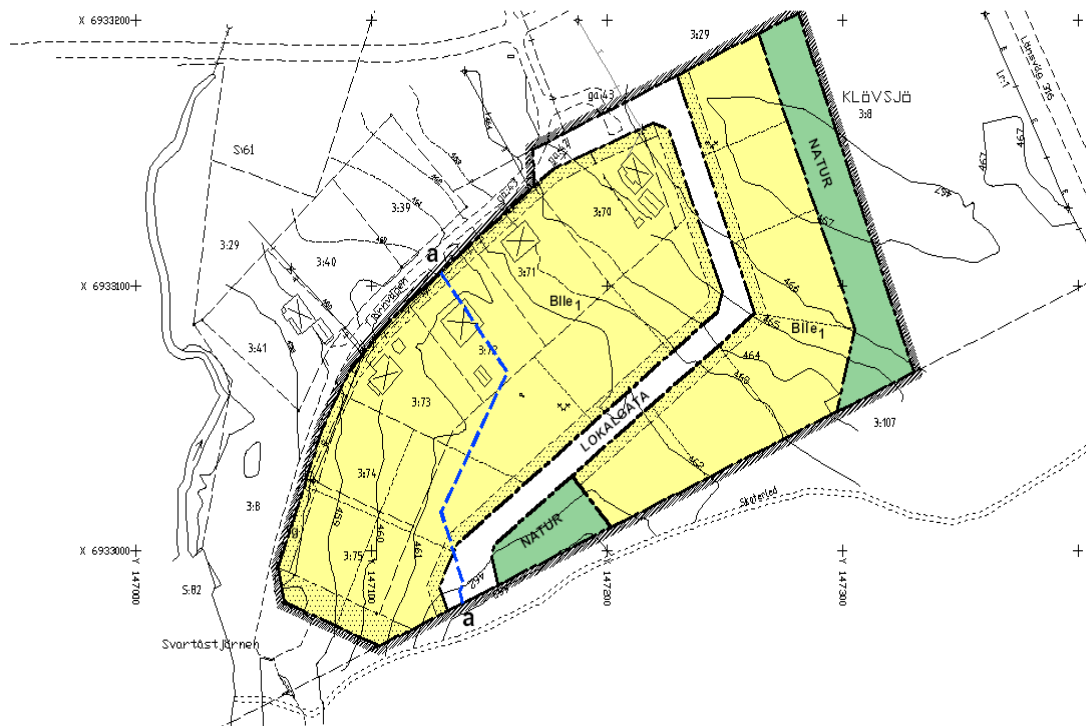
Figur 7.1. Utritning från en digital baskarta över Lund. Framtagen av Lunds kommun och publicerad med vederbörligt tillstånd.

I dag har de flesta primärkartverk ersatts av *kartdatabaser*. Genom sådana *digitala baskartor* (Figur 7.1) skapas möjligheter att från samma databas framställa produkter för vitt skilda ändamål – med skiftande krav på skala, utformning och detaljinhåll. Den digitala baskartan utgör därigenom stommen i varje kommunalt, *storskaligt informationssystem*. Förutom plandetaljer redovisas gränser för fastigheter, samfälligheter samt planer, rättigheter och bestämmelser.

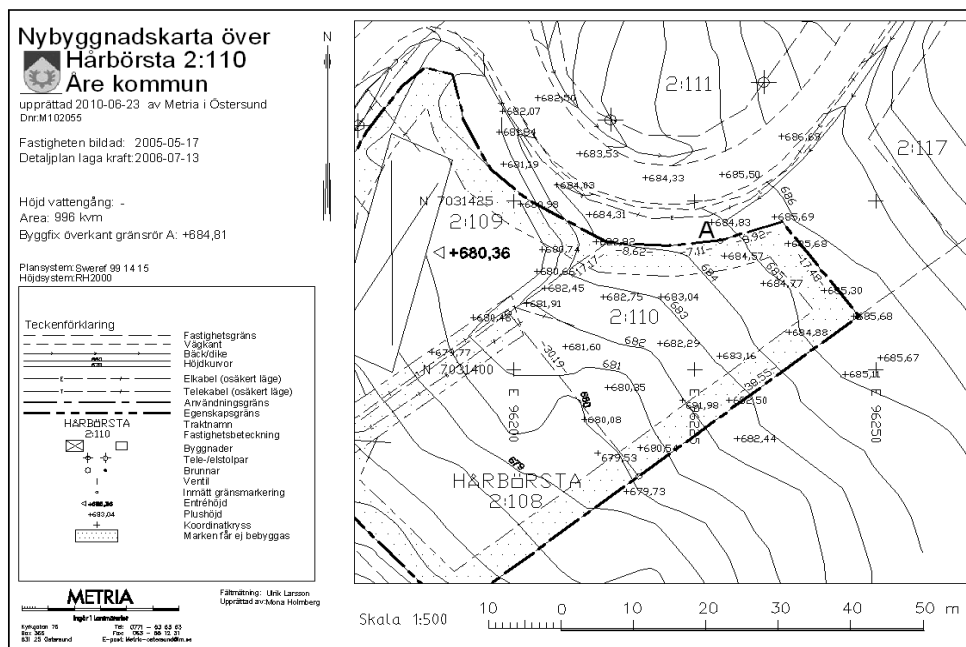
Exempel på användningsområden för den digitala baskartan är projektering och byggande samt redovisning av gator och vägar, tekniska anläggningar samt ledningsnät. Bland följdprodukterna kan nämnas *grundkarta*, som underlag för *detaljplan* (Figur 7.2), och *nybyggnadskarta* (Figur 7.3). Den senare utgör underlag för den *situationsplan* över fastigheten och byggnadens läge som i regel krävs vid bygglovsprövning.

Upprättande av grundkartor och nybyggnadskartor är exempel på mätningsteknisk ärendeverksamhet, liksom kompletterande inmätning samt utsättning. Ärendeverksamheten är till stor del av karaktären myndighetsutövning.

Utsättning av byggnader syftar till att deras form och läge på marken ska överensstämma med situationsplanen – på rätt avstånd från gränser och i rätt höjd i förhållande till gator och VA-ledningar. Vid *lägeskontroll* säkerställs detta genom inmätning av den färdiga grundkonstruktionens läge.



Figur 7.2. Kartdelen av en detaljplan över Klövsjö i Bergs kommun. Framtagen av Lantmäteriet/Metria och publicerad med vederbörligt tillstånd.



Figur 7.3. Nybyggnadskarta i Åre kommun. Framtagen av Lantmäteriet/Metria och publicerad med vederbörligt tillstånd.

Fastighetsbildningsverksamheten ger upphov till omfattande detaljmätningensåtgärder. I samband med det tekniska utredningsarbetet förekommer detaljmätning för att dokumentera hävdelinjer och byggnadsförhållanden. Vid utsättning av byggnader eller anläggningar på fastigheten är det väsentligt att gränsernas läge är väl definierade i handlingar eller på marken. Nyttillkomna fastighetsgränser utmärks vanligtvis i terrängen genom utsättning av gränsmarkeringar.

Detaljämätning i anslutning till bygg- och anläggningsverksamhet utgör i sammantaget en avsevärd volym. Förutom ren lägesutsättning sker detaljmätning i stor omfattning internt på byggplatsen, för att åstadkomma passning mellan närbelägna byggnadsdetaljer. På större byggplatser, samt vi bro- och tunnelbyggen, upprättas vanligen särskilda *primärnät* till stöd för detaljmätningensarbete.

7.2 Detaljmätningensprocessen

7.2.1 Grundläggande principer

All detaljmätning relateras direkt eller indirekt till ett referenssystem. Vid geodetisk mätning sker det via markerade stompunkter i ett stommät, t.ex. ett kommunalt bruksnät eller ett primärnät på en byggplats.

Ibland behöver stommätet förtätas eller på annat sätt kompletteras för att detaljmätningen ska bli genomförbar. Exempel på kompletteringar är bestämning av *piképunkter* eller andra *hjälpunkter*, detaljpolygonåtgång samt *fri station*. För att möjliggöra kontroll mäter man ofta in särskilda *kontrollpunkter*.

Den moderna standardutrustningen vid geodetisk detaljmätning är en totalstation (se avsnitt 5.3.1) och en *mätstång* med *prisma* för längdmätning. Med totalstationen kan horisontalvinklar, vertikalkvinklar och längder mätas och presenteras på en *display*. Den vanligaste mätmetoden är en kombination av polär mätning och trigonometrisk höjdmätning..

Mätsekvensen styrs av instruktioner från totalstationens *fältdator*. Vid inmätning lagras mätresultatet tillsammans med *objektkoder* som kategoriserar detaljerna i *detaljtyper*. Vid utsättning hämtas – på motsvarande sätt fast omvänt – *utsättningsdata* från fältdatorminnet.

7.2.2 Traditionell stationsetablering

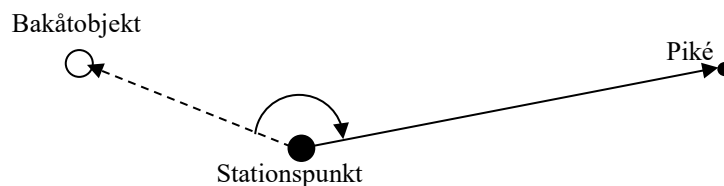
I begreppet *stationsetablering* ingår bestämning av instrumentets/totalstationens läge och orientering. Ett fel i etableringen äventyrar hela detaljmätningssuppdraget, varför den måste utföras med omsorg. Tre förfaranden tas upp här: stationsetablering på känd punkt, på en piképunkt samt som en fri station.

Stationsetablering på känd punkt berördes vid beskrivningen av den polära metoden (Figur 6.5) och trigonometrisk höjdmätning (Figur 6.12) i kapitel 7. Tilläggas bör att etableringen måste kontrolleras på något sätt, t.ex. genom:

- längdmätning mot bakåtobjektet och jämförelse med motsvarande avstånd beräknat ur de kända koordinaterna
- vinkelmätning mot fler än ett bakåtobjekt och kontroll av att orienteringen blir densamma
- polär inmätning av en känd punkt, som inte har använts vid stationsetableringen, samt jämförelse med dess koordinat- och höjdvärden.

Kontrollerna avser att säkerställa att rätt utgångspunkter har använts, att markeringarna är intakta samt att angivna koordinater/höjder är korrekta, dvs. man utför en kontroll av stomnätet.

Om stationspunkten inte har en känd höjd görs en separat höjdbestämning genom avvägning eller trigonometrisk höjdmätning mot en, eller helst flera, höjdfixar.



Figur 7.4. Bestämning av en piképunkt genom polär inmätning.

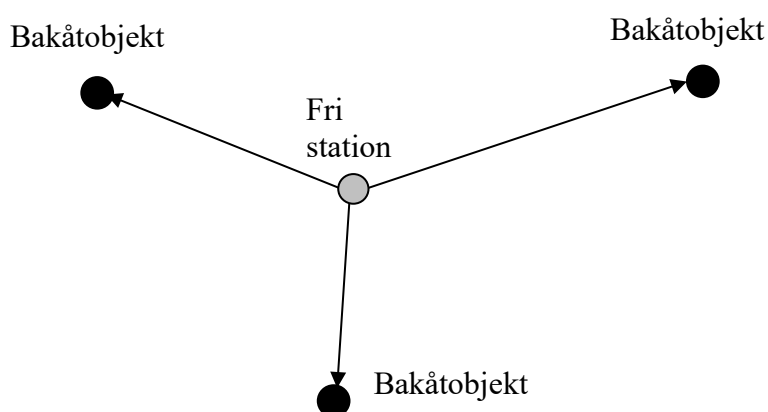
En piképunkt bestäms polärt från en stompunkt (se Figur 7.4) och tillämpas när sikt från en stompunkt saknas till några av detaljmätningssubjekten. Eftersom inmätningen i sig är helt okontrollerad måste en separat kontroll utföras. Den kan t.ex. ske genom att man från piképunkten mäter in ytterligare bakåtobjekt (kända punkter) efter genomförd stationsetablering. Alternativt kan man mäta in kontrollpunkter både från piképunkten och från den station piképunkten bestämdes ifrån.

Trots kontrollmöjligheterna bör piképunkter i möjligaste mån undvikas som stationspunkter. Detsamma gäller stationsetablering med hjälp av de elementära punktbestämningsmetoderna (avsnitt 6.2.1). Även dessa är i sin ursprungliga tappning okontrollerade och ur denna aspekt jämförbara med pikémätning. Ett bättre alternativ är att tillämpa fri station, som har en inbyggd möjlighet till kontroll. Detta är också den vanligaste stationsetableringsmetoden i dag.

7.2.3 Fri station

Fri station (synonymer: *fri uppställning* eller *fri stationsetablering*) innebär att instrumentets läge i plan och/eller höjd samt orientering bestäms genom mätning från en **fritt** vald uppställningspunkt – med en **valfri** kombination av längd- och riktningsmätningar, se Figur 7.5.

Vid fri station uppnår man en mindre regional osäkerhet i stationsetableringen än vid uppställning på ”känd” punkt, eftersom den fria stationens läge interpoleras från **flera** omkringliggande brukspunkter med samma kvalitet som en **enstaka** ”känd” punkt (interpolation är en generell term som används i betydelsen att man bestämmer värdet för en storhet i en punkt utifrån värdena från andra närliggande punkter). På detta sätt får man vanligen mindre motsättningar mellan detaljer inmätta från två fria stationer än mellan detaljer inmätta från två kända punkter.



Figur 7.5. Planbestämning av en fri station genom längd- och riktningsmätning mot tre bakåttobjekt.

En bra konfiguration av bakåttobjekten och den fria stationen ökar möjligheten att hitta grova fel (Figur 7.6). För att upptäcka och lokalisera dessa krävs dock *överbestämningar*, dvs. fler mätningar än vad som behövs för att överhuvudtaget få ett resultat. Och fria stationer är normalt överbestämda. Fler överbestämningar ger dessutom mindre osäkerhet i stationsetableringen även utan förekomst av grova fel.

De beräkningsmetoder som vanligen tillämpas för bestämning av fri station i plan är *koordinattransformation* och *sträng utjämning*.

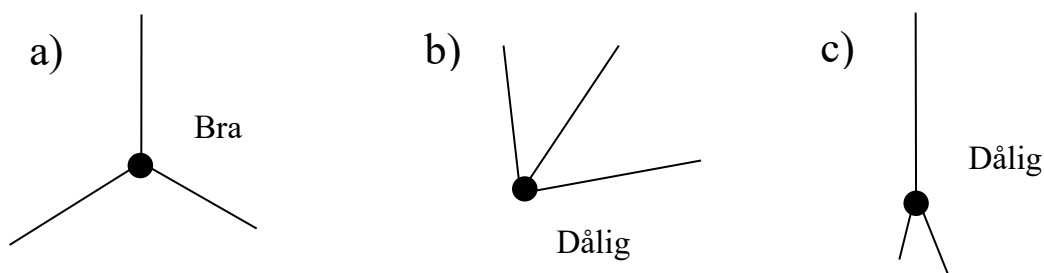
- Koordinattransformation innebär att man mäter både längd och riktning mot samtliga bakåttobjekt. Sedan betraktar man dessa punkter (stationspunkten och de inmätta bakåttobjekten) som ett fritt koordinatsystem, som transformeras på bakåttobjektens kända koordinater, se avsnitt 4.6.2. På så sätt bestäms stationspunktens koordinater. Metoden är robust och medger goda felsökningsmöjligheter, med en begränsad beräkningsinsats. Nackdelen är att en del av den fria stationsmetodens ”frihet” går förlorad, eftersom kombinationen längd-/riktningsmätning inte blir valfri.
- Sträng utjämning innebär ”elementutjämning enligt minsta-kvadratmetoden”, se kapitel 9. Kombinationen längder/riktningar är helt valfri och felsökningsmöjligheterna goda. Även om beräkningarna blir avsevärt mer omfattande än vid koordinattransformation så är detta i regel inget problem med dagens fältdatorer/totalstationer. Se Exempel 9.13.

Höjdanslutning sker vanligen med trigonometrisk höjdbestämning, se avsnitt 6.3.3.

Stationshöjden kan då till exempel beräknas genom att bilda medelvärde av bestämningarna för bakåtoobjekten.

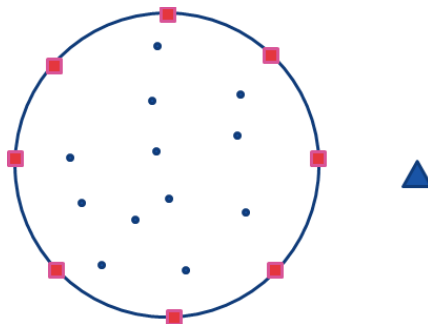
Sammanfattningsvis ges följande råd beträffande fri station:

- Överbestämd fri station med god konfiguration är vanligen att föredra framför uppställning på en känd punkt. En sådan stationspunkt kan anses vara likställd med de stompunkter som använts vid bestämningen, vanligen brukspunkter.
- För att få en god konfiguration för stationsetablering i planet bör bakåtoobjekten om möjligt vara jämnt fördelade kring stationspunkten. Konfigurationen a) i Figur 7.6 ger den lägsta möjliga osäkerhet i stationens koordinater och orientering. Detta är särskilt viktigt om man vill markera en ny utgångspunkt under den fria stationen för återanvändning vid framtida mätningar.



Figur 7.6. Bra och dåliga konfigurationer vid inmätning av fri station.

- Om man använder fri station för detaljmätning ska utgångspunkterna omsluta detaljpunkterna. Detta krävs för att uppnå lägsta möjliga lägesosäkerhet för de inmätta detaljpunkterna. Däremot är placeringen av den fria stationen mer fri om den inte ska markeras för återanvändning, se Figur 7.7.



Figur 7.7. Så här kan konfigurationen vara om den fria stationen (blå triangel) inte markeras för återanvändning. Den fria stationens placering kan då ligga utanför området (men inte alltför långt bort). Det som är viktigast här är att detaljpunkterna (svarta prickar) omringas av utgångspunkterna (röda kvadrater). (Källa: HMK Terrester detaljmätning 2020).

- Riktningmätning mot **avlägsna** referensobjekt förbättrar orienteringen.
- Vid höjdbestämning kan man vid korta siktlängder minska osäkerheten genom direkt mätning mot avvagningsstång.
- En dålig konfiguration bör kompenseras genom mätning mot ytterligare objekt. Riktningmätning stabiliserar punktbestämningen i tvärlid och längdmätning i längsled.

Kapitel 7: Detaljmätning

- En extra kontroll av stationsetableringen är att mäta in ytterligare objekt, som inte använts som bakåtojekt.
- Vid planmätning bör en överbestämning (extra mätning) per obekant eftersträvas. Detta erhålls genom mätning av längd och riktning mot tre bakåtojekt.
- Vid höjdmätning bör två överbestämningar per obekant eftersträvas. Detta åstadkoms genom mätning av höjdskillnader mot tre utgångsobjekt.
- Använd helst en beräkningsmetod med minsta-kvadrat-utjämning (jfr kapitel 9) och statistisk felsökning, så att grova fel kan detekteras och lokaliseras.
- Markera den fria stationen tillfälligt på marken. Det möjliggör kompletterande mätning/kontroll om fel upptäcks i en senare beräkning.
- Avsluta alltid mätningarna på en station med en upprepad inriktning mot ett bakåtojekt: en grov kontroll på att ingenting hänt med instrumentets orientering under pågående mätning.

7.2.4 Inmätning

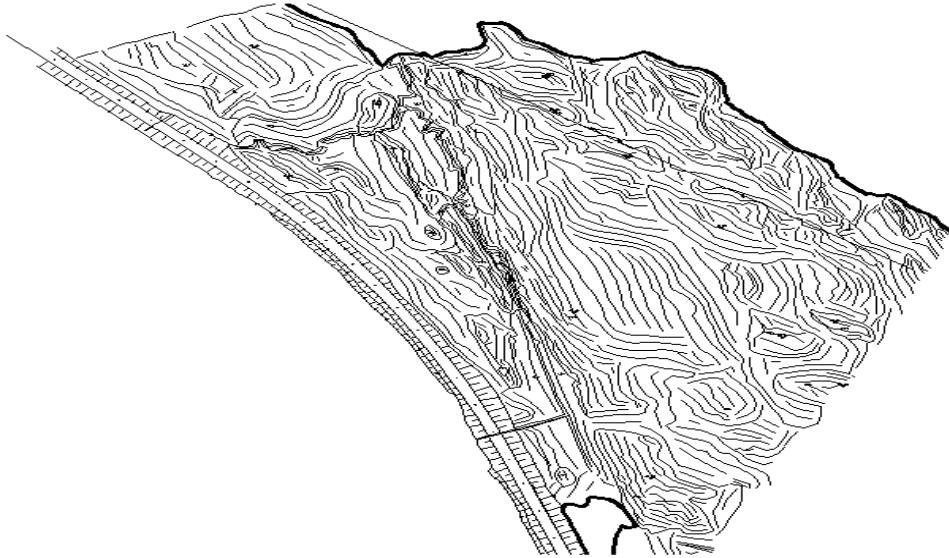
Ett fungerande fältarbete kräver en väl utförd planering. Detta gäller oavsett om arbetet avser inmätning för en nybyggnadskarta eller av fastighetsgränser i samband med en förrättning. Planeringen blir särskilt viktig vid inmätning av ledningar, t.ex. VA-ledningar, i ”öppen grav”, eftersom mätningen (och kontrollen av denna) då måste hinnas med innan ledningsgraven grävs igen.

Det viktigaste vid inmätning är att:

- Bedöma stornätets/bruksnätets kvalitet och täthet.
- Rekognosera ev. förtätning.
- Välja teknik och metoder.
- Definiera kvalitetskraven.
- Klargöra detaljinnehållet. Vilka objekt ska mätas in, hur ska de klassificeras och kodas samt vilka övriga uppgifter (attribut) ska samlas in?
- Fastställa omfattningen av de kontroller som ska göras, se nedan.
- Genomföra ev. markering och siktröjning.

Geodetisk detaljmätning används nästan undantagslöst vid inmätning för framställning av en kart(databas) över mindre områden, samt för komplettering vid fotogrammetrisk framställning. En ytterligare form av komplettering är *ajourhållning*, dvs. kontinuerlig justering av planbilden vid förvaltningen av kartan/databasen.

Andra tillämpningar än kart(databas)framställning och -komplettering är upprättande av *projekteringsunderlag* och *relationshandlingar* samt mätning av *terrängmodeller*, se Figur 7.8.



Figur 7.8. Redovisning av mätning av terrängmodell över del av Storlien, för framställning av grundkarta. Linjerna är inte höjdkurvor utan visar var mätningarna har utförts – med ambitionen att bäst fånga topografins karaktäristiska drag. Framtagen av Lantmäteriet/Metria och publicerad med vederbörligt tillstånd.

Mätning för terrängmodell benämns ofta *ytavvägning*, även om ett planbestämningmoment ingår – vilken punkt har vilken höjd? – och höjdmätningen sker trigonometriskt. Terrängmodellen interpoleras fram ur de inmätta punkterna. Metoden för interpolation kan variera – t.ex. i rutnät eller i trianglar, med eller utan höjdkurvor och brytlinjer.

Sett i ett längre tidsperspektiv har avvägning använts för detaljmätning i höjd. En detalj avvägs i den punkt som definierar dess höjd, t.ex. vattengången i en brunn eller överkanten på ett trapplan. Ytor avvägs i brytpunkter, dvs. där lutningsförändringar sker – alternativt i skärningspunkterna i ett teoretiskt rutnät, s.k. *rutavvägning* (se Figur 7.9). Ytavvägning har dock i dag nästan helt ersatts av mätning med totalstation (takymetrering), alternativt terrester laserskanning (se kapitel 1).

13	23	13	57	13	86	14	20	13	95
13	63	13	76	14	13	14	23	14	03
13	79	13	99	14	37	13	90	13	85

Figur 7.9. Redovisning av en rutavvägning. Höjdvärdena skrivs i direkt anslutning till det rutnätskryss som höjden avser. I figuren fungerar kryssset som "decimalkomma". Rutnätet stakas ut på marken innan avvägning sker.

7.2.5 Utsättning

Av praktiska skäl utförs vanligen plan- och höjdsättning var för sig, även om utvecklingen går mot samtidig utsättning.

I förberedelserna vid utsättning (av t.ex. en husgrund eller fastighetsgränser) ingår bl.a. att:

- Ta reda på vilka ritningar och övriga handlingar som är gällande.
- Kontrollera hur mått har angetts.
- Undersöka vad byggnadsbeskrivningen anger avseende utsättning – t.ex. övre gränser för mätosäkerheten, s.k. *toleranser*.
- Utvärdera stomnätets/primärnätets kvalitet och skick.
- Klargöra kraven på dokumentation och befästning/markering.

För själva utsättningsmomentet gäller:

- Sätt ut detaljer med höga krav på inbördes läge från samma station.
- Välj en metod som matchar kvalitetskraven.
- Bedöm vilka konsekvenser en felutsättning kan få och välj kontrollinsatsen i relation till denna.

Exempel 7.1: I Exempel 6.1 beräknades orienterad riktning och avstånd till fyra hushörn. Detta är inget annat än polära utsättningsdata för huset ifråga. Vid utsättningen riktas teodoliten/totalstationen in mot bakåtojektet och den orienterade riktningen från stationspunkten till bakåtojektet ställs in på sitt beräknade värde (332,012 gon). På så sätt kommer de orienterade riktningarna för hushörnen att direkt kunna ställas in på instrumentets horisontalskala, och sökas upp i den riktningen m.h.a. de beräknade avstånden.

Efter utsättning kan husets form kontrolleras genom mätning av de två diagonalerna, som ska ha rätt värden och vara lika. Om dessutom avståndet till bakåtojektet mäts kan man kontrollera att man har identifierat rätt bakåtojekt och att avståndet inte har förändrats, t.ex. p.g.a. att markeringarna har rubbats.

•

Rent tekniskt utförs utsättningen normalt i två steg: *grovutsättning* följt av *finutsättning*. Efter grovutsättningen kan en markering anläggas.

Ett bra arbetssätt är att utnyttja inmätning i finutsättningskedet: inmätning, justering, ny inmätning, ny justering o.s.v. tills inmätta data överensstämmer med utsättningsdata. Metoden bygger på att inmätning definitionsmässigt är mindre osäker än utsättning.

Utsättning i höjd innebär att man märker ut olika detaljers läge i höjd. Höjden anges normalt med flukt eller på annat lämpligt sätt. *Linjeavvägning* – mätning av höjdtåg – görs längs långsträckta objekt, t.ex. vägar och järnvägar. Sedan utgångslinjen har satts ut höjdsätts *profiler* och *tvärsektioner*.

Inom bygg- och anläggningssektorn görs även avvägning med plangivare, t.ex. en bygglaser (se avsnitt 5.4.3). Instrumentet genererar ett horisontellt plan, men vissa

modeller medger även inställning av lutande plan. Avläsningen kan göras direkt på en avvägningsstång, men som regel används en detektor som känner av laserstrålen.

7.2.6 Kontroll

Att kontrollera instrument, mätningar och resultat ingår som en självklar del i mätningens arbete. Flera metoder och tillvägagångssätt har redan kort diskuterats, t.ex. för stations-etablering, men ämnet ”kontroll” tas här upp på ett mer systematiskt vis.

Två huvudtyper av kontroll kan urskiljas: *Förebyggande kontroll* sker under arbetets gång. *Konstaterande kontroll* avser slutresultatet. Kontrollmätning bör alltid utföras med en metod som har en lägre mätosäkerhet än de mätningar som ska kontrolleras.

Med avseende på omfattningen skiljer vi på *delkontroll* och *allkontroll*. Delkontrollen utförs efter i första hand tre principer: *stickprovskontroll*, *procentuell kontroll* och *statistisk kontroll*.

Egenkontroll avser den kontroll som utföraren av arbetet gör. Resultatet redovisas till beställaren, men denne kan även göra egna kontroller, *beställarens kontroll*. Ofta upprättas särskilda *mätkontrollprogram* som en del av ett mätuppdrag.

All kontroll bygger på överbestämningar, t.ex. dubbelmätning av längder, återbesök på samma detaljpunkt, inmätning från två höjdfixar, inmätning av redan kända punkter etc.

Vid detaljmätning är vanligen den lokala överensstämmelsen viktigast – t.ex. att närliggande detaljer ligger rätt i förhållande till varandra, att hus har rätt storlek och är rektangulära etc. Detta kan kontrolleras genom separat längdmätning (avstånd mellan byggelement, fasadmått, jämförelse mellan de båda diagonalerna i en utsatt byggnad etc.).

För kontroll och justering av instrument finns anvisningar i kapitel 0. Men även om all utrustning är väl fungerande så är det viktigt att komma ihåg att vid detaljmätning är det oftast möjligheten att definiera en detalj som avgör mätosäkerheten, inte instrumentet eller själva mätningen. Vägkant, häck och träd är exempel på objekt som inte har någon självklar och distinkt definition vid inmätningen.

7.2.7 Markering

Som utgångspunkter vid detaljmätning används oftast stompunkter. Som vi redan har sett kan det dock ibland bli aktuellt att markera tillfälliga hjälp- och kontrollpunkter. För sådana punkter gäller i allmänhet att de bör kunna markeras snabbt och enkelt och får vara av en enklare markeringstyp än stompunkter.

I bygg- och anläggningsprojekt sker inmätning och utsättning av detaljpunkter från *primär- och sekundärpunkter*, dvs. punkter i primärnätet eller en förtätning av detta. Sådana *byggplatspunkter* ska vara varaktiga för den tid som byggnadsprojektet pågår. Markeringen kan vara av en tillfällig karaktär, men måste vara väl definierad. Punkterna bör placeras och markeras med omsorg eftersom de utsätts för stor skaderisk under byggnadstiden.

Detaljpunkter är lägesmarkeringar för byggnadsdelar eller komponenter inom bygg- och anläggningsverksamhet. Dessa punkter kan markeras på det exakta läget eller placeras strax invid komponenten för att utgöra underlag för kontroll efter montage. Valet av markeringssätt påverkas bl.a. av den kvalitet som krävs vid utsättningen.

I dokumentet HMK-Markering behandlas samtliga punkttyper vad gäller markering,

markeringssätt, identifiering, säkerställande och punktbeskrivningar. Dessutom beskrivs kontroll, underhåll, borttagande, återutsättning samt skydd och arkivering.

7.2.8 Mätningssanvisningar

Vid detaljmätning är det viktigt att rätt punkter mäts in. Vid t.ex. inmätning av geodata till kommunala bas- och primärkartor gäller att den som utför mätningen vet vilka punkter som ska mätas längs vägen, kring byggnaden etc. och som ska redovisas i databaserna och i kartorna. För att säkerställa detta upprättas mätningssanvisningar som innehåller uppgifter om vad som ska mätas in, både i plan och höjd, se Figur 7.10 som beskriver hur en byggnadsanläggning ska mätas in. Det finns mätningssanvisningar på både kommunal och statlig nivå; för närvarande (2021) håller Lantmäteriet på att ta fram nya mätningssanvisningar som en del i de *nationella specifikationerna av geodata*.



Figur 7.10. Beskrivning av hur en viss typ av byggnadsanläggning ska mätas in. I bilden identifieras att det är överkantens geometri som ska redovisas i databasen, och således mäts in. Källa: Lantmäteriet.

7.2.9 Dokumentation

Ett detaljmätningssprojekt omfattar oftast flera stegvisa aktiviteter, som var och en producerar någon form av resultat. Inmätningen ger mätdata, som efter beräkning ger koordinater/höjder för lagring i en databas. Före en utsättning beräknas utsättningsdata. Vid efterföljande kontrollmätning produceras mätdata. Ur dessa kan sedan *kontrolldata* beräknas.

Dokumentation av inmätning behövs för beräkning, kvalitetsmärkning och kartering. Mätdata bör åtminstone sparas tills projektet är avslutat, eftersom omberäkningar kan behöva göras. Vidare är fältarbetet ofta det mest kostsamma steget i kedjan.

Obearbetade mätdata dokumenteras så att vidarebearbetningen senare kan göras utifrån dessa. I de fall beräkningen sker redan i fält, bör ändå obearbetade data dokumenteras, för att möjliggöra senare nyberäkning. Även underlag för kartdatabas uppbyggnad lagras i *mätdatafilen*, liksom alfanumeriska uppgifter av olika slag (ansvarig, instrument, metod, tidplats etc.). En bearbetad fil, där alla data är oförändrade men

innehållet uppställt på ett mera lättläst sätt (*protokollsfil*), är en ännu bättre dokumentationsform vid redovisning.

En beräkning bör dokumenteras så att beräkningsgången kan rekonstrueras, t.ex. utgångspunkters koordinater, använda beräkningsprogram, referenssystem m.m. I tillämpliga delar gäller detta också beräkningar i samband med utsättning. Utsättningsdata kan t.ex. redovisas i form av koordinater samt beskrivningar av linjeelement med kurvparametrar. Kontrolldata kan vara avvikelser i plan och höjd, mellan punkters teoretiska och kontrollmätta lägen etc.

Sammantaget är det viktigast att spara den information som behövs för *kvalitetsmärkning* av data och framtagning av *metadata* ("data om data"). Till exempel sparas använd teknik och tillämpade metoder, samt uppgifter om mätosäkerheten.

Ovan har i huvudsak dokumentation av geometrin (objektens läge och form) berörts. I samband med geodetisk mätning finns det också stora möjligheter att samla in andra *objektbeskrivande data*, s.k. *attributdata*. I *geografiska informationssystem (GIS)* är ofta sådana uppgifter den viktigaste delen – som med fördel kan samlas in vid mättillfället, eftersom man då befinner sig på platsen.

Ett detaljmättningsprojekt regleras i dag ofta av ett arbetsprogram – ett beställare-/utförarekontrakt eller dylikt – där ambitionsnivån vad gäller dokumentationen anges. Men naturligtvis är dokumentation i en egenregiverksamhet lika viktig; man glömmer fortare än man tror och problem kan dyka upp långt efter det att projektet har slutförts.

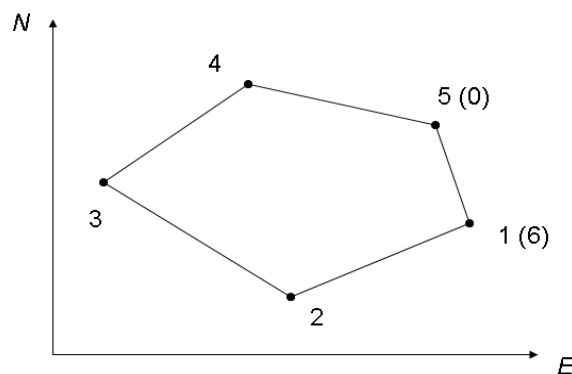
7.2.10 Beräkning av arean av en polygon

I flera detaljmätningstillämpningar behöver man beräkna arean av en polygon. Detta kan t.ex. vara beräkning av arean av en byggnad eller en fastighet. För att beräkna arean på polygonen (a) används Gauss areaformel:

$$a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n N_i (E_{i+1} - E_{i-1}) \quad 7.1$$

där n är antalet brytpunkter.

Formel 7.1 förutsätter att punkterna i polygonen är numrerade medurs (se Figur 7.11). Vidare måste första och sista punkten ha dubbla beteckningar. Detta fås genom att addera beteckningen $n+1$ till första punkten och beteckningen 0 till sista punkten. Detta är ett krav för att indexeringen ska vara korrekt i summationen i formel 7.1.



Figur 7.11. Polygon med 5 brytpunkter. Punkterna är numrerade i enlighet med kraven för formeln för areaberäkning (formel 7.1).

Exempel 7.2: Beräkna arean för polygonen i Figur 7.11 där brytpunkterna har koordinatvärden enligt tabellen nedan:

Punktnummer	N (m)	E (m)
1 (6)	5,0	9,0
2	2,0	5,0
3	6,0	1,0
4	9,0	4,0
5 (0)	8,0	8,0

För att beräkna arean används formel 7.1. Då erhålls:

$$a = \frac{1}{2} [5,0 * (5,0 - 8,0) + 2,0 * (1,0 - 9,0) + 6,0 * (4,0 - 5,0) + 9,0 * (8,0 - 1,0) + 8,0 * (9,0 - 4,0)] = \frac{1}{2} [-15 - 16 - 6 + 63 + 40] = 33 \text{ m}^2$$

Svar: Areal på polygonen är 33 m².

7.3 Detaljmätningens utveckling

I dag sker en stor del av den detaljmätning som utförs på marken – dvs. undantaget fotogrammetrisk mätning – med GPS-/GNSS-teknik (se kapitel 10–0) eller en kombination av satellitteknik och terrester detaljmätning. Den dominerande metoden är RTK-mätning, närmare bestämt nätverks-RTK; se även avsnitt 11.4.

Nätverks-RTK-användarens utrustning benämns *rover*, se Figur 7.12. Den utgörs av en mätstång försedd med satellitmottagare och antenn, mobilt internet eller radiomottagare samt fältdator. Med rovern kan såväl inmätning som utsättning utföras. Mätresultatet lagras och utsättningsdata beräknas i fältdatorn. För att minska mätosäkerheten används korrekationer som sänds ut från ett *aktivt referensnät*, som t.ex. det svenska *referensstationsnätet* SWEPOS® (Figur 11.3).

Osäkerheten vid denna typ av mätning ligger på centimeternivå, och en stor fördel är att användaren endast behöver **en** satellitmottagare (det aktiva referensnätet står för de övriga). Metoden är också mycket effektiv ur produktionssynpunkt eftersom mätningen sker direkt mot referensstationsnätet och inte via stom- eller hjälppunkter. En nackdel är att det krävs fri sikt till satelliterna, vilket kan vara ett problem i tätort eller i skog. Genom komplettering med annan teknik kan dock problemet reduceras.

En näraliggande kombination är att bestämma bakåtoobjekten med GPS/GNSS och utföra bestämningen av den fria stationen och detaljmätningen med totalstation. Det utnyttjar dock inte satellitteknikens fördelar fullt ut, varför en annan kombination har lanserats på senare tid. Den benämns RUFRIIS: *Realtidsuppdaterad fri station*.

Vid RUFRIIS är rovern även försedd med ett prisma för längdmätning. Under stationsbestämningen mäter totalstationen mot rovern (riktningar och längder)

samtidigt som rovern mäter mot satelliterna. Genom att flytta runt rovern – punkt för punkt – runt totalstationen får man så småningom dels ett ganska stort antal bakåtojekt, dels en välbestämd fri station genom konventionell inmätning mot dessa objekt. Detaljmätningen kan sedan ske alternerande med den ena eller den andra tekniken, beroende på sikthinder, vad som går snabbast och är mest praktiskt.

Vi kan således se att utvecklingen i detaljmätningen går mot mer användning av realtidsbaserade GPS/GNSS-metoder, med eller utan komplement av totalstation. Samtidigt framförs synpunkter på att dessa satellitmetoder inte når upp till de kvalitetskrav som ställs i flera detaljmätningstillämpningar. Det finns inga enkla svar i debatten om GPS/GNSS-metodernas tillförlitlighet. Därmed ställs höga krav på att de personer som utför detaljmätning är väl insatta i att den tekniken de använder uppfyller kvalitetskraven för deras tillämpningar.



Figur 7.12. Utrustning vid mätning med nätverks-RTK. Foto: Lantmäteriet.

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021.

Tack: Eftersom gamla HMK-Detaljmätning har varit utgångspunkten för kapitlet vill jag rikta ett stort tack till Bengt Andersson, Lantmäteriet, och Hans Holm, WSP Group, som ansvarade för framtagningen av detta dokument. / Clas-Göran Persson

Lästips: Den intresserade rekommenderas att läsa relevanta HMK-dokument, vilka kan hittas på Lantmäteriets webbsidor.

8 Mätosäkerhet

Ingen mätning är felfri; samtliga mätoperationer är förenade med en viss *mätosäkerhet*. I detta kapitel studerar vi några enkla exempel från statistiken och den geodetiska beräkningstekniken. Exempelen går samtliga ut på att få kontroll på mätosäkerheten, så att den kan presenteras tillsammans med mätresultatet. Den blir därför en sorts kvalitetsdeklaration som alltid bör följa med i redovisningen.

Det finns ett flertal olika terminologier för att ange mätosäkerhet. I detta kapitel, och i kompendiet för övrigt, används GUM-terminologi. För Er som är vana vid äldre svensk terminologi inom geodesi finns en jämförelse i avsnitt 8.8.2 och för Er som är vana vid terminologin inom matematisk statistik finns en jämförelse i avsnitt 8.8.3. Det rekommenderas att ni studerar dessa avsnitt parallellt med att termer introduceras i detta kapitel.

8.1 GUM

8.1.1 Historik

Beskrivningen i kapitlet följer konceptet ”Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”, förkortat *GUM*. Arbetet initierades av ”Internationella byrån för mått och vikt” (BIPM) och resulterade i ett embryo till GUM år 1980. Arbetet med guiden har sedan pågått i flera omgångar och under flera huvudmän. Nuvarande version ”JCGM 100:2008” förvaltas av konsortiet ”Joint Committee for Guides in Metrology” (JCGM), där bl.a. det internationella standardiseringsorganet ISO ingår.

Geodesin och den geodetiska mätningstekniken har stått litet utanför GUM-arbetet. I motsats till andra branscher hade man redan en fungerande hantering i dessa frågor. Till stor del berodde det på att Carl Friedrich Gauss, som var geodet, hade lagt grunden till behandlingen av mätdata genom innovationerna *normalfördelningen* och *minstakvadratmetoden* (*MK-metoden*) redan runt sekelskiftet 1700/1800.

Vi kommer här att anta att våra mätningar är normalfördelade och MK-metoden kommer att vara ett viktigt verktyg i vår dataanalys – så långt i enlighet med Gauss – men terminologin kommer att följa GUM. I dag finns det nämligen all anledning att tillämpa GUM även inom geodesin, eftersom enhetlighet och standardisering blir allt viktigare när gränserna mellan olika branscher och discipliner suddas ut. Ta t.ex. GPS – som började som en teknik inom navigation och geodesi, men som nu är vardagsteknik för alla.

8.1.2 Grundfilosofi

Skillnaden mellan GUM och synsättet inom geodesin – ja inom hela den traditionella matematiska statistiken – är alltså till stor del terminologisk (se avsnitt 8.8.2 - 8.8.3). Det finns dock även en olikhet i grundfilosofin.

Tidigare rörde diskussionen *mätfel* och *felanalys* i stället för *osäkerhet* och *osäkerhetsanalys*. När man pratar om fel innebär det att man relaterar sina mätningar till motsvarande **sanna** värden. Problemet är att man i princip aldrig kan hitta dessa.

Osäkerhetsbegreppet utgår därför endast från **observerbara** data (eng. ”measurands”). Mätosäkerheten är – enligt GUM – en parameter ”som är förbunden med mätresultatet och som kännetecknar spridningen av värden som rimligen kan tillskrivas mätstorheten”.

Denna grundfilosofi grundar sig på att man vanligen får nöja sig med att dra slutsatser ur sina egna mätningar – alternativt med hjälp av osäkerhetsmått som någon annan har tagit fram tidigare (osäkerheten i en viss metod, en viss typ av instrument etc.). Därför skiljer GUM även på bestämning av mätosäkerhet enligt *Typ A* eller *Typ B*:

- **Typ A:** Mätosäkerheten bestäms utifrån det egna mätresultatets variation.
- **Typ B:** Alla andra sätt att bestämma mätosäkerheten, t.ex. resultat från andra mätningar eller värden tagna från handböcker, kalibreringsbevis etc.

Observera att klassificeringen avser sättet att bestämma mätosäkerheten. Osäkerheterna som sådana har inte olika karaktär och ingen av typerna är ”bättre” än den andra. Det förekommer även blandningar av Typ A och Typ B.

8.2 Standardosäkerhet

Den allra enklaste typen av statistiska skattningar är att beräkna *medeltalet* av upprepade mätningar av en och samma storhet. Upprepningarna (överbestämningarna) görs dels för att kontrollera och förbättra mätresultatet, dels för att kunna skatta mätosäkerheten. I GUM används den traditionella *standardavvikelsen* som osäkerhetsskattning, men den benämns *standardosäkerhet* (alt. *standardmätosäkerhet* eller *standardiserad mätosäkerhet*).

I matematiska formler får vi följande samband för n st. upprepade mätningar av den sökta storheten x .

Skattning av x :

$$\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = \bar{l} \quad 7.2$$

Standardosäkerheten i en enskild mätning:

$$u(l) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{l} - l_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n v_i^2} \quad 7.3$$

”Taket” på \hat{x} betyder ”en skattning av x ” och strecket ovanför \bar{l} betecknar medeltal. v_i benämns *förbättring*, dvs. det värde man måste lägga till respektive mätvärde för att det ska överensstämma med det skattade värdet (i detta fall medeltalet). Det är just kvadratsumman $\sum v_i^2$ som minimeras vid skattning enligt minsta-kvadratmetoden. Standardosäkerheten anges vanligen med två signifikanta siffror.

Av skäl som kommer att framgå senare betecknar vi det osäkerhetsmått som baseras på den minimerade kvadratsumman med u_p , dvs. i vårt fall:

$$u_p = u(l) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n v_i^2} \quad 7.4$$

Beteckningen $u_p^2 = u^2(l)$ används för standardosäkerhetens kvadrat (*varians*).

Exempel 8.1: Beräkna medeltal och standardosäkerhet för följande mätserie (enhet meter):

3,2592	3,2516	3,2421	3,2580
3,2649	3,2696	3,2501	3,2597

Lösning: Medeltalet $\bar{l} = 3,2569$ m; standardosäkerheten (i en enskild mätning) $u_p = u(l) = 8,7260 \approx 8,7$ mm; antalet överbestämningar = $8 - 1 = 7$.

Standardosäkerheten är här av Typ A eftersom skattningen görs utifrån egna data. Gör Dig bekant med Din miniräknare så att Du snabbt och enkelt kan göra denna typ av beräkningar!

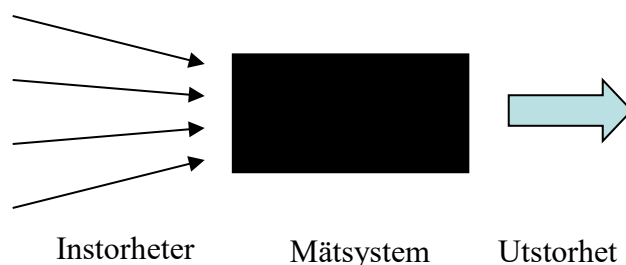
8.3 Vad är en mätning?

Innan vi går längre i utläggningen om mätosäkerhet bör vi rimligen ställa oss grundfrågan: Vad är en mätning? Vanligen är ju förhållandena något mer komplicerade än i föregående avsnitt. GUM uttrycker svaret på följande sätt.

En *mätstorhet* uttrycks i ett *mätetal* och en *enhet*. Vid *mätning* bestäms mätetalet och vi får ett *mätresultat*. Ofta ingår flera mätoperationer i beräkningen av mätresultatet. Sambandet mellan mätstorheten x (*utstorheten*) och *instorheterna* l_1, l_2, l_3, \dots kan skrivas:

$$x = f(l_1, l_2, l_3, \dots) \quad 7.5$$

där x, l_1, l_2, l_3, \dots är mätta eller beräknade storheter. Dessa storheter bildar ett *mätssystem*, se Figur 8.1.



Figur 8.1. Ett mätssystem.

Exempel 8.2: Höjdskillnaden (utstorheten/mätstorheten) vid trigonometrisk höjdmätning bestäms ur (instorheterna) instrumenthöjd, signalhöjd, längd och vertikalvinkel. I den "svarta lådan" finns formlerna som anger sambandet mellan in- och utstorheterna, jfr avsnitt 6.3.3 och formel 6.10.

8.4 Sammanlagd standardosäkerhet

Den *sammanlagda standardosäkerheten* är i princip en tillämpning av *lagen om fortplantning av mätosäkerhet* på funktionen 7.5. Denna "lag" lyder

$$u_c^2(\hat{x}) = c_1^2 u^2(l_1) + c_2^2 u^2(l_2) + c_3^2 u^2(l_3) + \dots \quad 7.6$$

och de partiella derivatorna $c_i = \frac{\delta x}{\delta l_i}$ benämns *känslighetsfaktorer*.

$u_c(\hat{x})$ är beteckningen för den sammanlagda standardosäkerheten i skattningen av x , där c står för "combined". Den tenderar till att vara av Typ B, men kan vara av Typ A om **alla** storheter bestäms ur mätmaterialet.

Exempel 8.3: Bestäm den sammanlagda standardosäkerheten för ett medeltal och tillämpa detta uttryck på mätserien i Exempel 8.1.

Lösning: Ur formeln för medeltal $\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i$ får vi att samtliga känslighetsfaktorer blir

$$c_i = \frac{\delta \bar{l}}{\delta l_i} = \frac{1}{n}$$

Enligt formel 7.4 gäller i detta fall att $u_p = u(l)$ för alla mätningar, och formel 7.6 ger

$$u_c^2(\bar{l}) = (1/n)^2 u_p^2 + (1/n)^2 u_p^2 + (1/n)^2 u_p^2 + \dots = n(1/n)^2 u_p^2 = u_p^2 / n$$

dvs.

$$u_c(\bar{l}) = u_p / \sqrt{n}$$

För mätserien i Exempel 8.1 innebär det att

$$u_c(\bar{l}) = 8,7260 / \sqrt{8} \approx 3,1 \text{ mm (Typ A)}$$

Eftersom detta är en så vanligt förekommande storhet så utesluter man vanligen c :et i formeln, dvs.

$$u(\bar{l}) = u(l) / \sqrt{n} = u_p / \sqrt{n} \quad 7.7$$

och ger uttrycket den mer kortfattade benämningen *medeltalets standardosäkerhet*. Skilj alltså på **den enskilda mätningens** standardosäkerhet och **medeltalets** standardosäkerhet! Ofta – men inte alltid – är det den senare som är av störst intresse.

På motsvarande sätt får man standardosäkerheten för **differensen** mellan två mätningar med samma standardosäkerhet $u(l) = u_p$ till:

$$u(|l_1 - l_2|) = \sqrt{(1)^2 u_p^2 + (-1)^2 u_p^2} = \sqrt{2u_p^2} = u_p \sqrt{2} \quad 7.8$$

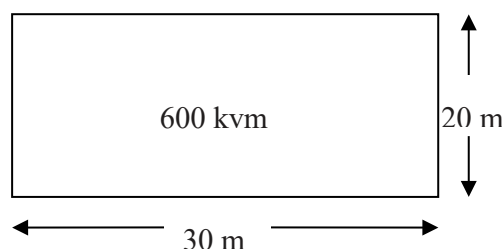
Och vidare standardosäkerheten för **summan** av n st. mätningar (med samma standardosäkerhet) till:

$$u(l_1 + l_2 + \dots + l_n) = \sqrt{(1)^2 u_p^2 + (1)^2 u_p^2 + \dots + (1)^2 u_p^2} = \sqrt{nu_p^2} = u_p \sqrt{n} \quad 7.9$$

En något mer komplicerad situation åskådliggörs i följande exempel.

Exempel 8.4: Bestäm den sammanlagda standardosäkerheten för arealen av en rektangulär ägofigur på 30x20 meter om standardosäkerheten i mätningen av längd och bredd båda är 20 mm. Samtliga vinklar i figuren förutsätts vara räta.

Lösning: Mätssystemet blir: Arealen = Längden x Bredden $\Leftrightarrow A=LB$. Mätosäkerheten skattas av standardosäkerheterna $u(L) = u(B) = 20 \text{ mm}$.



Vi får känslighetsfaktorerna:

$$c_1 = \frac{\delta A}{\delta L} = B; \quad c_2 = \frac{\delta A}{\delta B} = L$$

som genom tillämpning av lagen om fortplantning av mätosäkerhet (9.5) ger den sammanlagda standardosäkerheten för arealen till:

$$u_c(a) = \sqrt{B^2 u^2(L) + L^2 u^2(B)} = \sqrt{20^2 \cdot 0,02^2 + 30^2 \cdot 0,02^2} \approx 0,72 \text{ kvadratmeter}$$

Den *relativa standardosäkerheten* blir alltså $0,72/600 \approx 0,12 \%$. Osäkerhetskattningarna är av Typ B, eftersom vi utgår från på förhand givna standardosäkerheter.

8.5 Mätningar med olika vikt

Hittills har vi bara hanterat situationer där mätningarna (instorheterna) förutsätts ha samma osäkerhet. Om så inte är fallet brukar man införa *vikter*, som ett medel att ge olika mätningar olika stort inflytande på slutresultatet. Ett enkelt, välkänt exempel är *viktat medeltal*:

$$\bar{l}_p = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i l_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad 7.10$$

där p_i anger vikten för den i :te mätningen, l_i . Eftersom vikterna är olika kan inte en enda standardosäkerhet anges, som gäller för alla enskilda mätningar. I stället införs *viktsenhetens standardosäkerhet*:

$$u_p = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i (\bar{l}_p - l_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i v_i^2} \quad 7.11$$

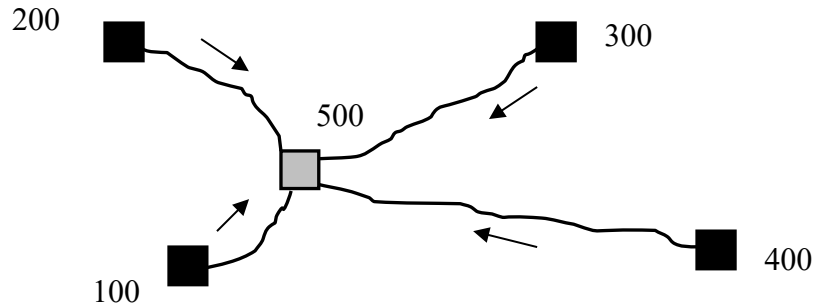
dvs. standardosäkerheten för en mätning med vikten ett, $p_i = 1$. Som antyds i formelns sista led är det här kvadratsumman $\sum p_i v_i^2$ som minimeras vid minsta-kvadratberäkningen (jfr avsnitt 8.2).

Det *viktade medeltalets standardosäkerhet* ges slutligen av:

$$u(\bar{l}_p) = u_p / \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i} \quad 7.12$$

En lämplig kontroll kan vara att sätta in $p_i = 1$ för alla mätningar i formlerna 8.9 – 8.11 och konstatera att vi då får motsvarande formler (8.1, 8.2 och 8.6) för det ”vanliga” medeltalet, dvs. \bar{l} , $u(l)$ och $u(\bar{l})$. Därmed har vi också fått förklaringen till beteckningen u_p i formel 7.4 – och därför använder vi fortsättningsvis formlerna i detta avsnitt generellt; vanligt (enkelt) medeltal ju bara är ett specialfall av det viktade, där alla vikter är lika med ett.

Exempel 8.5: Beräkna höjden på fixpunkten 500 ur följande avvägningar. Använd vikter omvänt proportionella mot tåglängden. Beräkna även höjdbestämnings standardosäkerhet.



Från	Till	Tåglängd (km)	Vikt	Höjd på fix nr 500 (meter)
100	500	2	0,500	14,354
200	500	3	0,333	14,360
300	500	4	0,250	14,353
400	500	6	0,167	14,351

Lösning: Det viktade medeltalet av de fyra bestämningarna ger följande skattning av höjden på fix 500:

$$\hat{H}_{500} = \bar{l}_p = \frac{0,500 \cdot 14,354 + 0,333 \cdot 14,360 + 0,250 \cdot 14,353 + 0,167 \cdot 14,351}{0,500 + 0,333 + 0,250 + 0,167} = 14,355 \text{ meter}$$

Viktsenhetens standardosäkerhet beräknas enligt formel 7.11 som:

$$u_p = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i v_i^2} = \sqrt{\frac{1}{4-1} [0,500 \cdot (-1)^2 + 0,333 \cdot (+5)^2 + 0,250 \cdot (-2)^2 + 0,167 \cdot (-4)^2]} \approx 2,041 \text{ mm}$$

Det ger, enligt formel 7.12, en standardosäkerhet i höjdbestämningen av fix nr 500 på:

$$u(\hat{H}_{500}) = 2,041 / \sqrt{(0,500 + 0,333 + 0,250 + 0,167)} \approx 1,8 \text{ mm (Typ A)}$$

Sammantaget: Höjden på fix nr 500 skattas till 14,355 meter, med en standardosäkerhet på 1,8 mm. (Höjdbestämning av fixpunkter utefter respektive tåg kan sedan ske på samma sätt som vid beräkning av enkeltåg, se Exempel 6.6 i avsnitt 6.3.2; nu när såväl slut- som startpunkten är bestämd.)

Vikter sätts ibland litet schablonmässigt, men de ska naturligtvis på ett rimligt sätt motsvara mätkvalitén. Mer stringent sätts vikterna omvänt proportionella mot kvadraten på respektive mätningens standardosäkerhet – som man alltså måste ha någon kunskap om. Enklast tillämpas:

$$p_i = 1/u^2(l_i) \quad 7.13$$

även om täljaren kan vara vilken konstant som helst, inte nödvändigtvis ett. Om vikten $p_i = 1$ får vi då $u(l_i) = u_p$ eftersom u_p just, enligt 9.10, är "standardosäkerheten för en mätning med vikten ett". För andra vikter, $p_i \neq 1$, gäller formeln

$$u^2(l_i) = u_p^2 / p_i \Leftrightarrow u(l_i) = u_p / \sqrt{p_i} \quad 7.14$$

som ger oss möjlighet att beräkna standardosäkerheten i varje enskild mätning.

Exempel 8.6: Beräkna standardosäkerheterna för de fyra avvägningstågen i Exempel 8.5, givet att viktsenhetens standardosäkerhet $u_p = 2,041$ mm.

Lösning:

Från	Till	Tåglängd	Vikt	Standardosäkerhet $u(l_i) = u_p / \sqrt{p_i} \Leftrightarrow$ $u(l_i) = u_p * \sqrt{\text{tåglängden}}$
100	500	2 km	0,500	2,9 mm
200	500	3 km	0,333	3,5 mm
300	500	4 km	0,250	4,1 mm
400	500	6 km	0,167	5,0 mm

Tågens standardosäkerhet kan sammanfattas i formeln $u(l_i) = 2,0 \text{ mm} / \sqrt{\text{km}}$.

8.6 Utvidgad mätosäkerhet

Vad säger då standardosäkerheten egentligen? I Exempel 8.3 beräknade vi standardosäkerheten för medeltalet $\bar{l} = 3,2569$ m till $u(\bar{l}) = 3,1$ mm. Man ser ibland detta redovisat som $3,2569 \text{ m} \pm 3,1 \text{ mm}$, dvs. som ett intervall $[3,2538; 3,2600]$. Frågan är med vilken sannolikhet den sökta storheten x ligger inom detta intervall. Svaret, just i fallet 7 överbestämningar, är 65%. Vi uttrycker det på följande sätt:

$$P\{\bar{l} - u(\bar{l}) < x < \bar{l} + u(\bar{l})\} = 65\% \quad 7.15$$

där $P\{\}$ betecknar *sannolikhet*. Ett intervall av denna typ benämns *konfidensintervall*, och 65% är dess *konfidensnivå* eller *täckningsgrad*.

I ungefär 35% av fallen ligger alltså den sökta (ut)storheten **utanför** detta intervall. Därför brukar man "förlänga" intervallet genom att multiplicera standardosäkerheten med en *täckningsfaktor* k . På så sätt ökar täckningsgraden och denna förlängning benämns *utvidgad mätosäkerhet*.

Låt oss som vanligt förutsätta att mätningarna är normalfördelade och att vi känner standardosäkerheten mycket väl, t.ex. genom att vi har gjort många – egentligen oändligt många – mätningar. Då ger täckningsfaktorn $k = 1,96$ ett intervall med täckningsgraden 95 %, dvs.

$$P\{\bar{l} - 1,96 \cdot u(\bar{l}) < x < \bar{l} + 1,96 \cdot u(\bar{l})\} = 95\% \quad 7.16$$

Med k -värdet avrundat till en jämn 2:a har detta bildat skola vid tillämpningen av GUM, dvs. $k = 2$ och täckningsgraden 95% ska i första hand användas vid beräkningen; undantag bör motiveras.

Den utvidgade standardosäkerheten (i t.ex. skattningen \hat{x}) betecknas:

$$U(\hat{x}) = k u(\hat{x}), \text{ eventuellt förkortat till } U = k u \quad 7.17$$

Man bör redovisa såväl standardosäkerheten och täckningsfaktorn som den resulterande utvidgade mätosäkerheten – och dessutom den bedömda täckningsgraden, i %. Det senare kan ske i ord, men ibland redovisas konfidensnivån som index på U och/eller k , t.ex.

$$U_{95}(\hat{x}) = k_{95} u(\hat{x}) \quad 7.18$$

Exempel 8.7: Beräkna den utvidgade standardosäkerheten för areaberäkningen i Exempel 8.4. Tillämpa 95% täckningsgrad.

Lösning: Eftersom vi inte har någon annan information att gå på så sätter vi $k = 2$. Vi formulerar resultatet sålunda, vilket kan anses var en mall för hur mätosäkerhet ska rapporteras enligt GUM:

”Mätosäkerheten för arealen har skattats till 1,4 kvadratmeter. Den har beräknats som utvidgad standardosäkerhet $U(A) = k u(A)$, där $k = 2$ är täckningsfaktorn och standardosäkerheten för arealen är $u(A) = 0,72$ kvadratmeter. Bedömd täckningsgrad är 95 %.”

Författarens simuleringsstudier visar att k_{95} för denna fördelning är 1,95, dvs. $k = 2$ ger en täckningsgrad straxt över 95% (närmare bestämt 95,6%). 2 är alltså en bra approximation!

•

I samband med medeltal och standardavvikelse har vi i den matematiska statistiken kommit i kontakt med *t-fördelningen*. Vi vet därifrån att:

$$P\{\bar{l} - t_{95}(n-1)u(\bar{l}) < x < \bar{l} + t_{95}(n-1)u(\bar{l})\} = 95\% \quad 7.19$$

där $t_{95}(n-1)$ är t-fördelningens gränsvärde på 95% för $n-1$ överbestämningar. Har man få överbestämningar kan det vara bättre att tillämpa t-fördelningen än $k = 2$. Detta åskådliggörs i Tabell 8.1.

I tabellen ser vi att t-fördelningen konvergerar mot normalfördelningens värde 1,96 när antalet överbestämningar ökar.

Tabell 8.1. *t-fördelningens täckningsfaktorer för 95% täckningsgrad, som funktion av antalet överbestämningar.*

Överbestämningar = \bar{o}	3	7	15	30	50	80	120	∞
$t_{95}(\bar{o})$	3,182	2,365	2,131	2,042	2,009	1,990	1,980	1,960

Exempel 8.8: Beräkna utvidgad mätosäkerhet för medeltalet i Exempel 8.1 och 8.3. Använd t-fördelningen och tillämpa 95% täckningsgrad.

Kapitel 8: Mätosäkerhet

Lösning: Vi har 7 överbestämningar, och m.h.a. Tabell 8.1 får vi täckningsfaktorn $k_{95} = t_{95}(7) \approx 2,365$.

Alltså: ”Storheten x skattas till $\hat{x} = \bar{l} \pm t_{95}(7)u(\bar{l}) = 3,2569 \pm 0,0073$ meter. $\bar{l} = 3,2569$ är medeltalet av 8 mätningar, talet efter \pm är en utvidgad mätosäkerhet med 95% täckningsgrad, täckningsfaktorn $t_{95}(7) = 2,365$ är t-fördelningens gränsvärde för 95% med 7 överbestämningar och $u(\bar{l}) = 0,0031$ meter är medeltalets standardosäkerhet.”

8.7 En enkel GUM-kokbok

I detta avsnitt sammanfattar vi metodiken i form av en processbeskrivning – en enkel ”GUM-kokbok”.

- 1) Bestäm sambandet mellan utstorheten (mätstorheten) och alla instorheter som kan påverka den.
- 2) Skatta värden på alla instorheter.
- 3) Skatta värdet på instorheternas standardosäkerheter, antingen med statistisk analys av en mätserie (Typ A) eller på annat sätt (Typ B).
- 4) Beräkna värdet på utstorheten.
- 5) Bestäm känslighetsfaktorn som hör till varje instorhet.
- 6) Beräkna utstorhetens sammanlagda standardosäkerhet.
- 7) Ta fram en täckningsfaktor som svarar mot en vald täckningsgrad.
- 8) Beräkna den utvidgade mätosäkerheten.
- 9) Rapportera mätresultatet tillsammans med utvidgad mätosäkerhet och dess täckningsgrad.

8.8 Terminologiska jämförelser

För att förenkla läsningen av annan litteratur inom området görs i detta avsnitt ett antal terminologiska jämförelser.

8.8.1 Svensk-engelsk GUM-ordlista

I Tabell 8.2 redovisas en svensk-engelsk ordlista över de vanligaste GUM-termerna.

Tabell 8.2. Svensk-engelsk GUM-ordlista.

Svenska	Engelska
känslighetsfaktor	sensitivity coefficient
lagen om fortplantning av mätosäkerhet	law of propagation of uncertainty of measurement
mätosäkerhet	uncertainty (of measurement)
mätstorhet	measurand
sammanlagd standardosäkerhet	combined standard uncertainty
standardosäkerhet	standard uncertainty
Typ A/B bestämning av mätosäkerhet	Type A/B evaluation (of uncertainty)
täckningsfaktor	coverage factor
täckningsgrad, konfidensnivå	coverage probability, level of confidence
utvidgad mätosäkerhet	expanded uncertainty

8.8.2 Jämförelse med äldre svensk terminologi

I Tabell 8.3 görs en jämförelse mellan GUM:s terminologi och den hittillsvarande svenska terminologin inom området ”felteori”, som den geodetiska tillämpningen av statistik och statistiska beräkningar brukar benämnas.

Den största skillnaden togs upp redan i början av kapitlet (se avsnitt 8.1.2): Tidigare talade man om noggrannhet, mätfel och felanalys i stället för mätosäkerhet och osäkerhetsanalys. En följd av detta är att *medelfel* – vanligen betecknat σ – är en central term i den äldre terminologin.

Vidare saknas vissa termer i tabellen, t.ex. ”täckningsfaktor” och ”utvidgad mätosäkerhet”. Anledningen är helt enkelt att det inte har funnits några termer för dessa begrepp tidigare. Man har så att säga ”gått runt” frågan utan att ha en speciell terminologi för den.

Vanliga uttryck var t.ex.

- ”Medelfelet är 20 mm” alternativt ”Noggrannheten är 20 mm (1σ)”, vilket är samma sak som att standardosäkerheten är 20 mm.
- ”Noggrannheten är 40 mm (2σ)” alternativt ”Noggrannheten är 40 mm (95%)”, vilket motsvarar en utvidgad standardosäkerhet med täckningsfaktorn 2 och en täckningsgrad på 95%.

Tabell 8.3. Översättningstabell: GUM vs. traditionell svensk terminologi.

GUM-termer	Motsvarande traditionella termer
lagen om fortplantning av mätosäkerhet	medelfelets fortplantningslag
medeltalets standardosäkerhet	medeltalets medelfel
standardosäkerhet i plan	punktmedelfel
standardosäkerhet, $u()$	medelfel, σ
viktshetens standardosäkerhet, u_p	grundmedelfel, σ_0
överbestämningar	överbestämningar, frihetsgrader

8.8.3 Jämförelse med terminologi i matematisk statistik

I Tabell 8.4 görs en jämförelse mellan GUM:s terminologi och terminologin inom matematisk statistik (i enlighet med de begrepp som traditionellt används på svenska universitet, se t.ex. grundböcker av Blom med flera och av Vännman).

Tabell 8.4. Översättningstabell: GUM vs. terminologi i matematisk statistik.

GUM-termer	Motsvarande traditionella termer
lagen om fortplantning av mätosäkerhet	är en tillämpning av Gauss approximationsformler
medeltalets standardosäkerhet	medelvärdets standardavvikelse
standardosäkerhet, $u()$	standardavvikelse
standardosäkerhet i kvadrat, $u^2()$	varians
överbestämningar	frihetsgrader

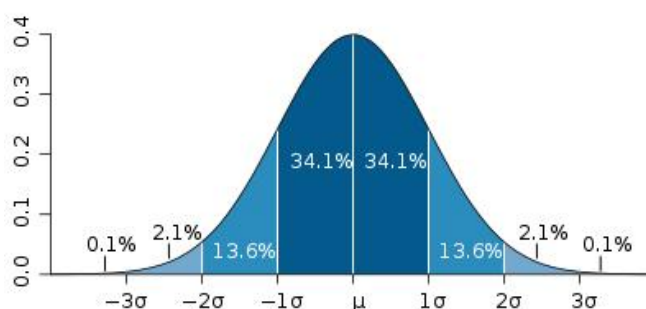
Inom GUM används ett skrivsätt som ”en utvidgad standardosäkerhet med täckningsfaktorn x ”; detta motsvarar vad man inom matematisk statistik benämner ”konfidensintervall med konfidensgraden y ”.

8.9 Toleranser och HMK

Hela GUM-konceptet bygger på redovisning av **faktisk** mätosäkerhet. I många branscher regleras mätkvalitén i form av stipulerade *toleranser*, dvs. gränsvärden för avvikelser, osäkerhetsmått etc. som inte får överskridas. HMK innehåller sådana toleranser för olika typer av mätningar. I gamla HMK-Detaljmätning, Bilaga F, finns toleranser för detaljmätning. I gamla HMK-Stommätning, Bilaga A, finns toleranser för stommätning – fast där benämns toleranserna *felgränser*, i enlighet med den äldre terminologin.

HMK laborerar med tre toleransnivåer. De bygger på antaganden om mätosäkerheten/medelfelet (σ) och den teoretiska normalfördelningen (Figur 8.2), som säger att

- 1σ har täckningsgraden 68,3 % ($\approx 2/3$)
- 2σ har täckningsgraden 95,5 % ($1,96\sigma \rightarrow 95\%$)
- 3σ har täckningsgraden 99,7 %



Figur 8.2. Normalfördelningen

Nivåerna tillämpas på följande sätt:

- 1σ -gränser används för ett test av att antagandet om att mätdata är normalfördelade är korrekt – ett **fördelningstest**. $2/3$ av mätmaterialen bör ha avvikelser som är mindre än detta värde.
- 2σ används som **varningsgräns**. Om avvikelserna överskrider denna gräns bör den bakomliggande orsaken analyseras.
- Avvikelse större än 3σ betraktas som ”grova fel”, rena misstag alltså. Därför är 3σ -gränsen att betrakta som en ren **kassationsgräns** och ommätning krävs.

I Tabell 8.5 ges ett exempel på toleranser/felgränser från HMK-Stommätning.

Tabell 8.5. Felgränser för slutningsfel i anslutningsnät i höjd; tåglängden L anges i km. (Gamla HMK-Stommätning, Bilaga A, Tabell A.13).

Typ av tåg	Maximalt slutningsfel (mm)		
	I	II	III
Enkeltåg mellan kända punkter	-	$4\sqrt{L}$	$6\sqrt{L}$
Tåg ingående i höjdnät	$1\sqrt{L}$	$2\sqrt{L}$	$3\sqrt{L}$

För ”enkeltåg” i tabellen finns naturligtvis inget fördelningstest (nivå I); det finns ju bara ett tåg. Det som finns är varnings- och kassationsgränser, vars storlek beror på

tågets längd (\sqrt{L} , jfr Exempel 8.6). För ”tåg i höjdnät” ska 2/3 av antalet tåg ha ett slutningsfel $< 1\sqrt{L}$. I tåg där slutningsfelet $> 2\sqrt{L}$ bör orsaken undersökas och om slutningsfelet $> 3\sqrt{L}$ bör ommätning ske.

Exempel 8.9: Jämför resultatet i Exempel 8.5 med toleranserna/felgränserna i Tabell 8.4. Dvs. under antagandet att det rör sig om avvägning i ett anslutningsnät.

Från	Till	Tåglängd (km)	Slutningsfel (förbättring v_i) (mm)	I	II	III
				$1\sqrt{L}$ (mm)	$2\sqrt{L}$ (mm)	$3\sqrt{L}$ (mm)
100	500	2	-1	1,4	2,8	4,2
200	500	3	+5	1,7	3,5 *	5,2
300	500	4	-2	2,0	4,0	6,0
400	500	6	-4	2,4	4,9	7,3

Lösning:

Alla tågen klarar kassationsgränsen (III). Tåget 200-500 är dock varningsflaggat på nivå II, dvs. orsaken bör undersökas. Fördelningsgränsen är naturligtvis svår att tillämpa med så få tåg, men hälften klarar gränsen och hälften ligger över nivå I. Resultatet är ”med tvekan godkänt”.

•

I HMK tillämpas begreppet *kontrollerbarhet* i stor utsträckning, särskilt i HMK-Stommätning. Kontrollerbarheten anger hur pass svårt/enkelt det är att hitta grova fel i ett mätmaterial. Även om vi i GUM försöker undvika begreppet ”fel” så förtjänar eliminering av just denna typ av felaktig hantering (avläsningsfel, skrivfel etc.) sin plats i presentationen.

Kontrollerbarheten – vanligen i ett geodetiskt nät – brukar mätas med det s.k. *k-talet*¹, som definieras som

$$k = \frac{n-m}{n} = \text{antalet överbestämningar/antalet mätningar} \quad 7.20$$

där m = antalet obekanta och n = antalet mätningar. I triangelnät bör man eftersträva $k \geq 0,5$, dvs. en kontrollerbarhet $\geq 50\%$. Typiska värden för höjdnät (avvägningsnät) är $k \approx 0,3$ (30%) och i polygontåg med många ingående punkter är $k \approx 0,1$ inte ovanligt.

k -talet ger en uppfattning av hur stor del av ett grovt fel som ”syns” i motsvarande förbättring efter en beräkning enligt minsta-kvadratmetoden. I ett triangelnät syns alltså ca. 50% men i ett polygontåg bara 10%. Ett decimeterfel i ett sådant tåg ger alltså endast upphov till en förbättring runt 1 cm! Vart tar då resten vägen? Jo det går in i koordinatberäkningen, flyttar runt punkternas positioner och fördärvar på så sätt beräkningsresultatet!

¹ Detta k -tal ska inte blandas ihop med täckningsfaktorn k , som är något helt annat! Ibland kolliderar beteckningskonventionerna.

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021 (men bara mindre ändringar gjordes).

Lästips: Lantmäteriet, KTH, Högskolan i Gävle och Lunds Tekniska Högskola inledde under 2010 ett gemensamt arbete att introducera GUM inom mätningstekniken i Sverige. I ”Nya HMK” på webben (www.lantmateriet.se/HMK) presenteras GUM i form av en artikel, ett tillhörande presentationsbildspel samt ett antal exempel och fördjupningar. Materialet är på svenska och tänkt att kunna användas vid information om GUM samt inom utbildningen i mätningsteknik på högskolor, universitet etc.

Den som läser detta material kommer att upptäcka vissa skillnader gentemot kompendiet, bl.a. vad gäller beteckningar. GUM:s beteckningssätt är nämligen så stringent och annorlunda att det nästan blir förvirrande. I kompendiet har därför vissa förenklingar varit nödvändiga, eftersom det är ämnat för en grundläggande geodesikurs och inte en expertkurs. För mer information om GUM, se Persson(2010a-f). Även Lindskog (2006) kan rekommenderas.

9 Minsta-kvadratberäkningar med matriser

Om beräkningarna blir mer komplicerade än de enkla exempel som redovisades i det förra kapitlet så underlättas hanteringen betydligt genom användning av matriser. Som kuriosas kan nämnas att förre professorn i geodesi på KTH i Stockholm, Arne Bjerhammar, i mycket hög grad har bidragit till utvecklingen av matrismetoder för geodetiska beräkningar enligt minsta-kvadratmetoden. Det är den ”skolan” vi följer i denna beskrivning. De viktigaste formlerna från kapitlet ingår i formelsamlingen.

9.1 Grundläggande matrisalgebra och notationer

Det är alltid enklare med en entydig notation, och om matrisbeteckningarna alltid avser samma sak. Samtliga vektorer betecknas därför med fetskrivna gemener: \mathbf{x} för vektorn med obekanta parametrar, \mathbf{l} för vektorn med mätningar etc. Båda dessa är kolumnvektorer, dvs. stående. Alla nm -matriser (dvs. matriser med n rader och m kolumner) med $n > 1$ och $m > 1$ betecknas med feta versaler, t.ex. \mathbf{A} . Referens till ett visst element i en vektor/matris sker med användning av suffix, t.ex. l_i , A_{ij} (i avseende rad och j avseende kolumn).

På ”riktiga” matriser, dvs. sådana som inte är vektorer, kan man applicera två viktiga operationer: *transponering* och *invertering*. Vid transponering – beräkning av en matris *transponat*, \mathbf{A}^T – byter suffixen plats, dvs. $A_{ij} \rightarrow A_{ji}$. Invertering – beräkning av en *invers*, \mathbf{A}^{-1} – uppfyller villkoret:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad 8.1$$

där \mathbf{I} är *enhetsmatrisen*:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad 8.2$$

Endast kvadratiska matriser kan ha inverser, men inte alltid. *Singulära matriser* (dvs. determinanten är lika med noll) saknar invers. Matriser används, som sagts inledningsvis, i samband med beräkningar enligt minsta-kvadratmetoden. I dessa sammanhang beror singularitet vanligen på att man har formulerat sitt problem ofullständigt eller på annat sätt felaktigt.

Exempel 9.1: Transponera matrisen \mathbf{A} och beräkna $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Lösning:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exempel 9.2: Invertera $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ från Exempel 9.1. Använd följande formel:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$$

Kommentar: 2*2-matriser är ganska lätta att invertera, men sedan blir det värre. Vi hänvisar här till läroböcker i linjär algebra eller programsystem typ MATLAB.

Lösning:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 6 - 3 \cdot 3} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,286 & -0,143 \\ -0,143 & 0,238 \end{pmatrix}$$

Kontroll (jfr 8.1):

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

En matris som uppfyller $A_{ij} = A_{ji}$ för alla $i \neq j$, dvs. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, benämns *symmetrisk*. Den måste vara kvadratisk och i en sådan matris är delen ovanför diagonalen och den del som ligger under diagonalen varandras spegelbilder. Det ger vissa förenklingar vid beräkningar av invers och lösning av ekvationer. Alla matriser av typen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ – och dess invers $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ (om den existerar) – är symmetriska.

Produkten av två inverterbara (kvadratiska) matriser \mathbf{A} och \mathbf{B} av samma storlek är inverterbar med inversen:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad 8.3$$

Det gäller även att:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad 8.4$$

samt för en inverterbar matris:

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad 8.5$$

9.2 Elementutjämning enligt MK-metoden

9.2.1 Samma vikt på observationerna

Observationsekvationerna för den vanligaste geodetiska utjämningsmetoden *elementutjämning* skrivs²:

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad 8.6$$

där \mathbf{A} ($n \times m$) är den s.k. *koefficientmatrisen*, som anger sambandet mellan n st. mätningar \mathbf{l} och m st. obekanta \mathbf{x} , som skattas av $\hat{\mathbf{x}}$. Eftersom det finns fler mätningar än obekanta ($n > m$) så är inte systemet entydigt lösbart. Man kommer runt detta genom att tillföra förbättringarna \mathbf{v} och göra dessa så små som möjligt genom att bestämma $\hat{\mathbf{x}}$ på ett sådant sätt att man minimerar kvadratsumman:

² Den som vill ha något mer konkret att hänga upp tankegångarna på kan "tjuvtitta" på Exempel 10.11. I början på lösningen till detta exempel tillämpas formel 8.6) på ett geodetiskt beräkningsproblem.

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad 8.7$$

Därav namnet minsta-kvadratmetoden, som härleddes i det följande; i kapitel 8 tog vi ju metoden som given.

Vi startar minimeringen på traditionellt sätt genom att derivera den storhet som ska minimeras och sätta derivatorna = 0. Att vi här har med vektorer och matriser att göra ändrar inte tillvägagångssättet nämnvärt. Den storhet som ska minimeras är $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$, som vi först skriver om till:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l})^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{l}^T) (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{l}^T \mathbf{l}$$

Eftersom $\mathbf{l}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$ är en skalär (1*1-matris) går det lika bra att skriva $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l}$, vilket ger:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l} + \mathbf{l}^T \mathbf{l}$$

Derivering med avseende på \mathbf{x} ger sedan:

$$\frac{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\delta \mathbf{x}} = \frac{\delta \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x}}{\delta \mathbf{x}} - 2 \frac{\delta \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l}}{\delta \mathbf{x}} + \frac{\delta \mathbf{l}^T \mathbf{l}}{\delta \mathbf{x}}$$

Vi har $\frac{\delta \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x}}{\delta \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$; $\frac{\delta \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{l}}{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{l}$; $\frac{\delta \mathbf{l}^T \mathbf{l}}{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{0}$;

och om vi sätter $\frac{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{0}$ får vi slutligen:

$$\frac{\delta \mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\delta \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{l} = 2(\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{l}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{l}$$

Skattningen $\hat{\mathbf{x}}$, som alltså är en vektor, erhålls således genom att man löser *normal-ekvationerna*³:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{l} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad 8.8$$

Formel 8.7, $\sum v_i^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$, där $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$ används för att beräkna den enskilda mätningens standardosäkerhet. Eftersom alla mätningar har vikten ett så lyder uttrycket:

$$u(l) = u_p = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum v_i^2} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-m}} \quad 8.9$$

$\hat{\mathbf{x}}$ -skattningarnas *varians-kovariansmatris* är (se vidare avsnitt 9.2.3)

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = u_p^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad 8.10$$

där man hittar standardosäkerheterna i diagonalen, dvs.

$$u^2(\hat{x}_i) = (Q_{\hat{\mathbf{x}}})_{ii} \Leftrightarrow u(\hat{x}_i) = u_p \sqrt{(A^T A)^{-1}_{ii}} \quad 8.11$$

³ Man behöver egentligen inte invertera matrisen $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, det räcker att lösa systemet för att få fram värdet på de obekanta – t.ex. med Gauss-elimination. Men eftersom vi behöver inversen för beräkning av varians-kovariansmatrisen så är invertering ändå ett alternativ. Man ska dock se formeln ”formellt” och inte ”aritmetiskt”.

Exempel 9.3: Ställ upp beräkning av enkelt medeltal som ett elementutjämningsproblem och härled formlerna för medeltal och medeltalets standardosäkerhet.

Lösning: Vi får enligt formel 8.6 följande ekvationssystem:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{1} + \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

\mathbf{A} -matrisen blir alltså en kolumnvektor med endast ettor, och vi har bara en obekant: medeltalet.

Normalekvationerna 8.8 blir:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{1} \Leftrightarrow n \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n l_i$$

med lösningen:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{1} = \frac{1}{n} \sum l_i = \bar{l}; \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{n}$$

Förbättringarna $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{1}$ ger standardosäkerheten i en enskild mätning (jfr 8.9) som:

$$u(l) = u_p = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{l} - l_i)^2}$$

och slutligen medeltalets standardosäkerhet (10.11) till

$$u(\hat{\mathbf{x}}) = u_p \sqrt{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{11}^{-1}} = u_p / \sqrt{n} = u(\bar{l})$$

Överensstämmelsen med Exempel 8.3 är som synes total. Vi har därmed visat att medeltalet är en MK-skattning samt att matrisformlerna överensstämmer med de klassiska formlerna.

Exempel 9.4: Lös följande problem med elementutjämnning och beräkna de sedvanliga osäkerhetsskattningarna.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &= 6 \\ 1x_1 + 1x_2 &= 4 \\ 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Lösning: Vi får enligt formel 8.6:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{1} + \mathbf{v} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

och känner igen \mathbf{A} -matrisen från Exempel 9.1-9.2, varifrån vi får $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$. Vi behöver alltså endast beräkna:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 12+4+0 \\ 6+4+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

varefter de obekanta enligt formel 8.8 erhålls som:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{I} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 36 \\ 52 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,71 \\ 2,48 \end{pmatrix}$$

Förbättringarna beräknas ur:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{I} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 124 \\ 88 \\ 104 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,095 \\ 0,190 \\ -0,048 \end{pmatrix}$$

och deras kvadratsumma blir:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \frac{1}{21^2} ((-2)^2 + 4^2 + (-1)^2) = \frac{21}{21^2} = \frac{1}{21} \approx 0,0476190$$

Standardosäkerheten i en enskild mätning – i detta fall lika med viktsenhetens standardosäkerhet (formel 8.9) eftersom alla mätningar har vikten ett – blir alltså:

$$u_p = u(l) = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v} / (n - m)} = \sqrt{\left(\frac{1}{21}\right) / (3 - 2)} = \sqrt{\frac{1}{21}} \approx 0,22$$

$\hat{\mathbf{x}}$ -skattningarnas varians-kovariansmatris (10.10) är:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = u_p^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{21^2} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

vilket enligt formel 8.11 ger standardosäkerheterna för \hat{x}_1 och \hat{x}_2 :

$$u(\hat{x}_1) = \sqrt{6} / 21 \approx 0,12; \quad u(\hat{x}_2) = \sqrt{5} / 21 \approx 0,11$$

Sammantaget: Minsta-kvadratmetoden ger skattningarna $\hat{x}_1 = 1,71$, med standardosäkerheten 0,12, och $\hat{x}_2 = 2,48$, med standardosäkerheten 0,12. Viktsenhetens standardosäkerhet (= den enskilda mätningens standardosäkerhet) skattas till $u_p = 0,22$.

9.2.2 Olika vikter på observationerna

Om mätningarna har olika vikter: p_1, p_2, \dots, p_n så etableras *viktsmatrisen*:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & P_{nn} \end{pmatrix} \quad 8.12$$

som, liksom enhetsmatrisen, är en *diagonalmatris*, där $p_i = P_{ii}$. Vi får på motsvarande sätt som i fallet med lika vikter:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I} \quad 8.13$$

och vidare viktsenhetens standardosäkerhet:

$$u_p = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n p_i v_i^2} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-m}} \quad 8.14$$

$\hat{\mathbf{x}}$ -skattningarnas varians-kovariansmatris ges av:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = u_p^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \quad 8.15$$

där man hittar standardosäkerheterna i diagonalen, dvs.:

$$u^2(\hat{x}_i) = (Q_{\hat{\mathbf{x}}})_{ii} \Leftrightarrow u(\hat{x}_i) = u_p \sqrt{(A^T P A)^{-1}_{ii}} \quad 8.16$$

Formlerna 8.13 - 8.16 övergår i 8.8 - 8.11 om man sätter $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, dvs. om alla mätningar har vikten $p_i = 1$.

Exempel 9.5: Ställ upp beräkning av viktat medeltal som ett elementutjämningsproblem och härled formeln för detta medeltal samt för det viktade medeltalets standardosäkerhet.

Lösning: Vi får återigen följande ekvationssystem (jfr 8.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{1} + \mathbf{v} \\ \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Men normalekvationerna blir nu i stället (jfr 8.13):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \cdot \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n p_i l_i$$

med lösningen:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} = \sum_{i=1}^n p_i l_i / \sum_{i=1}^n p_i = \bar{l}_p; \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = 1 / \sum_{i=1}^n p_i$$

Ur förbättringarna ($\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{1}$) erhålls viktsenhetens standardosäkerheten (8.14) som

$$u_p = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i v_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i (\bar{l}_p - l_i)^2}$$

och slutligen medeltalets standardosäkerhet (8.16) till:

$$u(\hat{x}) = u_p \sqrt{(A^T P A)^{-1}_{11}} = u_p / \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i} = u(\bar{l}_p)$$

Dessa formler överensstämmer med dem i avsnitt 8.5, dvs. även det viktade medeltalet – och tillhörande osäkerhetsskattningar – är i enlighet med MK-metoden.

•

9.2.3 Korrelation och analys av funktioner av obekanta

I detta avsnitt tittar vi litet närmare på formel 8.15 och vad man mer kan få ut av den information som varians-kovariansmatrisen innehåller. Det ena är beräkning av korrelation – det andra är beräkning av standardosäkerheten för funktioner av de obekanta som skattats i utjämnningen.

Enligt formel 8.15 ges $\hat{\mathbf{x}}$ -skattningarnas varians-kovariansmatris av uttrycket $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = u_p^2(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$. Fullt utskrivnen lyder formeln:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = u_p^2(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} u^2(\hat{x}_1) & \dots & u(\hat{x}_1, \hat{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(\hat{x}_m, \hat{x}_1) & \dots & u^2(\hat{x}_m) \end{pmatrix} \quad 8.17$$

där $u^2(\hat{x}_i)$ är variansen (kvadraten på standardosäkerheten) för den i :te obekanta parametern och *kovariansen* mellan den i :te och den j :te obekanta parametern är $u(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = u(\hat{x}_j, \hat{x}_i)$.

Kovariansen mäter graden av samvariation mellan två variabler. Positiv kovarians innebär att om den ena variabeln ökar så ökar även den andra. Vid negativ kovarians är det tvärt om. Ur varianser och kovarianser kan man beräkna *korrelationen*, som är en sorts normerad kovarians. *Korrelationskoefficienten* beräknas som

$$\rho_{ij} = \frac{u(\hat{x}_i, \hat{x}_j)}{\sqrt{u^2(\hat{x}_i)u^2(\hat{x}_j)}} = \frac{u(\hat{x}_i, \hat{x}_j)}{u(\hat{x}_i)u(\hat{x}_j)} \quad 8.18$$

För ρ_{ij} gäller att

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq +1 \quad 8.19$$

Vi väljer att ha som tumregel att om $|\rho_{ij}| \geq 0,7$ så är korrelationen (samvariationen) att betrakta som stor. Då kan det vara svårt att skilja variablerna åt i en MK-beräkning. Man kan ofta uttala sig om skillnaden mellan eller summan av två korrelerade storheter men inte alltid om värdet på respektive variabel. I ett geodetiskt nät tyder hög **positiv** korrelation (felen tenderar att gå åt samma håll) på att den lokala mätosäkerheten är liten, men att den regionala osäkerheten är stor. En, litet överdriven, liknelse är att man känner storleken och formen på ett hus men är mer osäker på var huset ligger. Vid **negativa** korrelationer går felen i motsatta riktningar.

Exempel 9.6: Beräkna korrelationen mellan skattningarna av de obekanta i Exempel 9.4.

Lösning: Varians-kovariansmatrisen är

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = u_p^2(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{21^2} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \text{ viktsmatrisen } \mathbf{P} = \mathbf{I}$$

dvs. $u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = u(\hat{x}_2, \hat{x}_1) = -3/21^2 \approx 0,0068$ och – vilket vi redan vet sedan tidigare – $u(\hat{x}_1) = \sqrt{6}/21 \approx 0,12$ och $u(\hat{x}_2) = \sqrt{5}/21 \approx 0,11$. Formel 8.18 ger alltså korrelationskoefficienten

$$\rho_{12} = \frac{u(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{u(\hat{x}_1)u(\hat{x}_2)} = -\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{5}} \approx -0,55$$

mellan skattningarna \hat{x}_1 och \hat{x}_2 av de obekanta. Den är att betrakta som måttlig, dvs. vi bör ganska säkert kunna uttala oss om de enskilda skattningarna. Men viss (negativ) korrelation finns.

•

Ibland vill man studera funktioner av de obekanta och då kan ett hjälpmedel vara att beräkna standardosäkerheten för dessa. Man utnyttjar även då varianskovariansmatrisen (8.15) och det går att visa att

$$u^2(\mathbf{f}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}\mathbf{Q}_x\mathbf{f}^T = u_p^2\mathbf{f}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{f}^T \quad 8.20$$

där $\mathbf{f}\hat{\mathbf{x}}$ är en (linjär) funktion av de obekanta. Formel 8.20 är i realiteten en generalisering av ”lagen om fortplantning av mätosäkerhet” (formel 7.6) – som dels tillåter kovarianser, dels är uttryckt i matrisform.

Exempel 9.7: Beräkna skillnaden mellan skattningarna av de två obekanta i Exempel 9.4. samt standardosäkerheten för denna skillnad

Lösning: Skillnaden är $|\hat{x}_1 - \hat{x}_2|$ vilket ger $\mathbf{f} = (1 \quad -1)$ och

$$|\mathbf{f}\hat{\mathbf{x}}| = \left| (1 \quad -1) \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \right| = \left| (1 \quad -1) \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 36 \\ 52 \end{pmatrix} \right| = \frac{16}{21} \approx 0,76$$

Skillnadens standardosäkerhet ges av formel 8.20:

$$u^2(\mathbf{f}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}\mathbf{Q}_x\mathbf{f}^T = (1 \quad -1) \frac{1}{21^2} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{17}{21^2} \approx 0,03855 \Rightarrow$$

$$u(|\hat{x}_1 - \hat{x}_2|) = \sqrt{\mathbf{f}\mathbf{Q}_x\mathbf{f}^T} = \frac{\sqrt{17}}{21} \approx 0,20$$

Skillnaden är alltså 0,76, med en standardosäkerhet på 0,20. Om \hat{x}_1 och \hat{x}_2 hade varit okorrelerade hade skillnadens standardosäkerhet varit (jfr Exempel 9.4):

$$u(|\hat{x}_1 - \hat{x}_2|) = \sqrt{(1)^2 u^2(\hat{x}_1) + (-1)^2 u^2(\hat{x}_2)} = \sqrt{(1)^2 \left(\frac{\sqrt{6}}{21}\right)^2 + (-1)^2 \left(\frac{\sqrt{5}}{21}\right)^2} = \frac{1}{21} \sqrt{11} \approx 0,16$$

Men p.g.a. den **negativa** korrelationen så blir osäkerheten i skillnaden något större.

•

9.3 Linjär regression

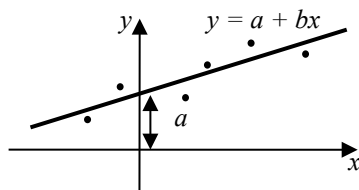
Linjär regression är kanske inte i första hand en geodesitillämpning, men den är i många sammanhang användbar vid analys av geografisk information – och dessutom ofta ”missbrukad”. Via matrisformen av detta minsta-kvadratproblem kan man dock dels förstå hur beräkningarna kan förenklas, dels lära sig att tillämpa metoden korrekt. Vissa allmängiltiga förfaranden ingår också, t.ex. *skalning* av ekvationssystem. Därför förtjänar linjär regression sin egen utläggning.

Problemet går ut på att anpassa en rät linje (se Figur 9.1)

$$y = a + bx \quad 8.21$$

Kapitel 9: Minsta-kvadratberäkningar med matriser

till parvisa mätdata i två serier. OBS att vi här använder matematiska definitioner på x och y .



Figur 9.1. Linjär regression

Grundformeln 8.6 ger oss ekvationssystemet

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{1} + \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad 8.22$$

Utifrån detta kan man sedan beräkna skattningarna på parametrarna a och b samt tillämpa hela batteriet av osäkerhetsmått och andra analyser. Det finns dock en del användbara ”trix”, vilket Exempel 9.8 visar.

Exempel 9.8: Utför en linjär regressionsanalys på följande data, dvs. skatta parametrarna a och b i formel 8.22 och beräkna på det sättet den årliga ökningen. Uppgifterna avser genomsnittspriset för 3-rums bostadsrättslägenheter i ett glesbygdsområde – långt, långt bort från Stockholm.

År	Snittpris (SEK)	År	Snittpris (SEK)
2000	500 000	2004	800 000
2001	600 000	2005	750 000
2002	550 000	2006	900 000
2003	650 000		

Lösning: Om man skulle tillämpa grundformeln direkt skulle man få ett mycket *ill-konditionerat system*, eftersom siffrorna är så olika stora. Vi skulle få:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2000 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 2006 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500000 \\ \vdots \\ 900000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_7 \end{pmatrix}$$

vilket skulle skapa numeriska problem. Därför vidtar vi två åtgärder för att skala om systemet. Den ena är att vi subtraherar medelåret (2003) från resp. år. Den andra är att vi byter enhet på snittpriset till mnkr (miljoner SEK), dvs. vi ”bryter ut” 10^6 . Då får vi det nya systemet:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = 10^6 \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,60 \\ 0,55 \\ 0,65 \\ 0,80 \\ 0,75 \\ 0,90 \end{pmatrix} + 10^6 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix}$$

som ser betydligt trevligare ut. Vi löser systemet.

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{28} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{I} = \frac{10^6}{7} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,75 \\ 1,75 \end{pmatrix} = \frac{10^6}{7} \begin{pmatrix} 4,75 \\ 0,4375 \end{pmatrix} \approx 10^6 \begin{pmatrix} 0,6786 \\ 0,0625 \end{pmatrix}$$

Subtraktionen av medelåret gav diagonala normalekvationer, som är enkla att lösa. En annan effekt är att $\hat{a} = \bar{y}$. Skalningen reducerade behovet av att ta med många siffror i beräkningarna. Om vi går tillbaka till den ursprungliga ordningen får vi följande formel för snittpriset ett visst år:

$$\begin{aligned} \text{Snittpriset} &= [0,6786 + 0,0625 \cdot (\text{år} - 2003)] \cdot 10^6 = \\ &= 678\,600 + 62\,500 \cdot (\text{år} - 2003) \text{ SEK} \end{aligned}$$

varur den årliga ökningen direkt kan utläsas till 62 500 SEK/år. Beräkningen av standardosäkerheter etc. överlätes till läsaren. Svar: Viktsenhetens standardosäkerhet, dvs. det enskilda årsmedeltalets standardosäkerhet, $u_p = 55\,000$ SEK. $u(\hat{a}) = 21\,000$ SEK och $u(\hat{b}) = 10\,000$ SEK. Prognosen för 2007 – ”allt annat lika”, dvs. bortsett från ev. finans-/fastighetskris – blir $678\,600 + 62\,500 \cdot (2007 - 2003) = 928\,600$ SEK, med standardosäkerheten 46 600 SEK. Alltså: några detaljerade slutsatser kan inte dras ur materialet.

•

Den mest fundamentala aspekten på linjär regression är emellertid: Finns det överhuvudtaget ett linjärt samband mellan variablerna x och y ? Det kan man undersöka genom att beräkna korrelationskoefficienten (jfr avsnitt 9.2.3).

Eftersom vi nu ska räkna korrelationskoefficienten mellan **mätningar** – och inte mellan minsta-kvadratskattningar, ur deras varians-kovariansmatris – krävs en liten modifiering av formel 8.18. *Kovariansen* mellan två mätserier $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ och $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ brukar skattas med:

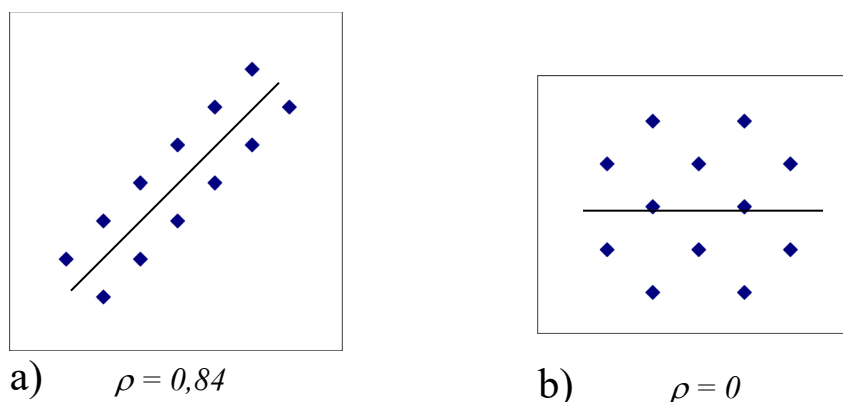
$$u(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \quad 8.23$$

och i analogi med 8.18 får vi korrelationskoefficienten:

$$\rho_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad 8.24$$

Egenskapen 8.19 är dock densamma, ett tal mellan -1 och 1. Men här **vill** vi ha en hög korrelation; det är det som gör beräkningen meningsfull.

Jämför de två exemplen i Figur 9.2. I a) är korrelationen hög och linjär regression ter sig realistisk. I b) ger minsta-kvadratmetoden en vågrät linje genom de två mittersta punkterna, men t.o.m. på "fri hand" skulle man kunna anpassa flera räta linjer, i olika riktningar, som känns lika troliga; linjär regression är inte realistisk i detta senare fall!



Figur 9.2. Exempel på stark resp. obefintlig korrelation

Tyvärr ser man ofta analyser baserade på linjär regression där korrelationen är i stort sett obefintlig. Därför bör korrelationskoefficienten alltid beräknas och redovisas tillsammans med skattningen av regressionslinjen.

Exempel 9.9: Beräkna korrelationskoefficienten för data i Exempel 9.8.

Lösning: Formel 8.24 ger:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{1,75}{\sqrt{28} \sqrt{0,1243}} \approx 0,9381$$

vilket gör den linjära regressionen klart meningsfull.

•

Att $\hat{a} = \bar{y}$ om man subtraherar \bar{x} från alla x -värden såg vi i Exempel 9.8. Man kan dessutom visa att:

$$\hat{b} = \rho_{xy} \frac{u(y)}{u(x)} \quad 8.25$$

och sammantaget

$$y = \bar{y} + \rho_{xy} \frac{u(y)}{u(x)} (x - \bar{x}) \quad 8.26$$

vilket är en enkel formel som endast utnyttjar de fundamentala storheterna \bar{x} , \bar{y} , $u(x)$, $u(y)$ och ρ_{xy} . Vidare framgår sambandet mellan **korrelation** och **regression**, genom att korrelationskoefficienten finns med i formeln för linjär regression. Vår tumregel sedan tidigare ger att det är meningsfullt att fortsätta beräkningarna bara om $|\rho_{xy}| \geq 0,7$

Exempel 9.10: Beräkna regressionslinjen i Exempel 9.8 med formel 8.26.

Lösning: Utgångsvärdena är $\bar{x} = 2003$; $\bar{y} = \hat{a} = 678\,600$ SEK; $u(x) = \sqrt{28/6} = 2,160$ år; $u(y) = 10^6 \sqrt{0,1243/6} \approx 143\,900$ SEK; $\rho_{xy} = 0,9381$. Det ger:

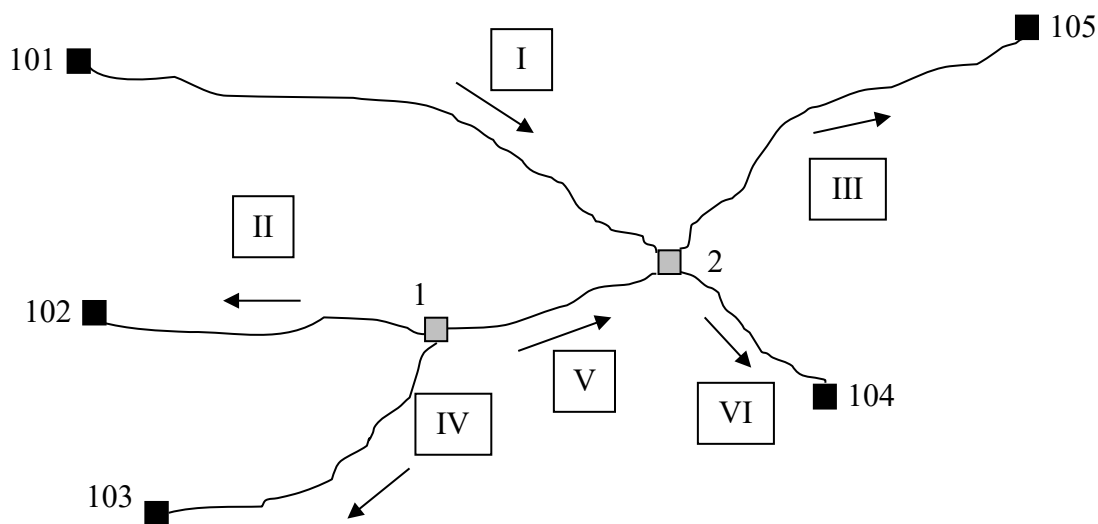
$$y = 678\,600 + 0,9381 \frac{143\,900}{2,160} (x - 2003) = 678\,600 + 62\,500 \cdot (x - 2003) \text{ SEK}$$

dvs. samma resultat som i Exempel 9.8.

9.4 Exempel på MK-skattning: dubbel knutpunkt i ett höjdnät

Låt oss nu räkna ett tillämpningsexempel som innefattar samtliga steg i beräkningen och samtliga storheter som har definierats i detta kapitel; som en sorts sammanfattning.

Exempel 9.11: Beräkna nedanstående avvägningsnät och samtliga tillhörande kvalitetsuppgifter.



Kapitel 9: Minsta-kvadratberäkningar med matriser

Mätningar					
Tåg nr	Från	Till	Tåglängd (km)	Vikt	Avvägd höjdskillnad (meter)
I	101	2	6,5	0,154	13.063
II	1	102	3,5	0,286	-4,579
III	2	105	4,5	0,222	6,724
IV	1	103	3,5	0,286	-7.857
V	1	2	2,5	0,400	6,117
VI	2	104	2	0,500	3,913

Ingångsdata:

Kända höjder					
Punkt	H (meter)	Punkt	H (meter)	Punkt	H (meter)
101	95,435	103	94,516	105	115,213
102	97,786	104	112,400		

Lösning: Vi ställer upp följande ekvationer:

$$\begin{aligned}\hat{H}_2 &= l_1 + H_{101} + v_1 \\ -\hat{H}_1 &= l_2 - H_{102} + v_2 \\ -\hat{H}_2 &= l_3 - H_{105} + v_3 \\ -\hat{H}_1 &= l_4 - H_{103} + v_4 \\ -\hat{H}_1 + \hat{H}_2 &= l_5 + v_5 \\ -\hat{H}_2 &= l_6 - H_{104} + v_6\end{aligned}$$

I matrisform blir dessa:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108,498 \\ -102,365 \\ -108,489 \\ -102,373 \\ 6,117 \\ -108,487 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,154 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,286 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,222 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,286 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,500 \end{pmatrix}$$

vilket ger normalekvationerna:

$$\begin{pmatrix} 0,972 & -0,400 \\ -0,400 & 1,276 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56,108268 \\ 97,48355 \end{pmatrix}$$

Vi beräknar först inversen:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{1,080272} \begin{pmatrix} 1,276 & 0,400 \\ 0,400 & 0,972 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,181184 & 0,3702771 \\ 0,3702771 & 0,8997734 \end{pmatrix}$$

och sedan de obekanta:

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 1,181184 & 0,3702771 \\ 0,3702771 & 0,8997734 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 56,108268 \\ 97,48355 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102,370115 \\ 108,488712 \end{pmatrix} m$$

Förbättringarna blir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 102,370115 \\ 108,488712 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 108,498 \\ -102,365 \\ -108,489 \\ -102,373 \\ 6,117 \\ -108,487 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,009288 \\ -0,005115 \\ 0,000288 \\ 0,002885 \\ 0,001597 \\ -0,001712 \end{pmatrix} m$$

Det ger oss viktsenhetens standardosäkerhet till:

$$u_p = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{6-2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^8 p_i v_i^2}}{2} = 0,0050648 / 2 = 0,0025324 = 2,5324 \cdot 10^{-3} m$$

dvs. $u_p \approx 2,5$ mm. Formel 7.14 ger därur mätningarnas standardosäkerhet som $u_p / \sqrt{p_i}$, alltså $2,5 mm / \sqrt{km}$.

Nu kan vi beräkna hela varians-kovariansmatrisen.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} &= u_p^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} u^2(\hat{H}_1) & u(\hat{H}_1, \hat{H}_2) \\ u(\hat{H}_2, \hat{H}_1) & u^2(\hat{H}_2) \end{pmatrix} = (2,5324 \cdot 10^{-3})^2 \begin{pmatrix} 1,181184 & 0,3702771 \\ 0,3702771 & 0,8997734 \end{pmatrix} = \\ &= 10^{-6} \begin{pmatrix} 7,575 & 2,375 \\ 2,375 & 5,770 \end{pmatrix} m^2 \end{aligned}$$

Och vi får:

$$u(\hat{H}_1) = \sqrt{7,575 \cdot 10^{-6}} = 2,752 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 2,8 \text{ mm}$$

$$u(\hat{H}_2) = \sqrt{5,770 \cdot 10^{-6}} = 2,402 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 2,4 \text{ mm}$$

$$\rho_{12} = \frac{u(\hat{H}_1, \hat{H}_2)}{u(\hat{H}_1) \cdot u(\hat{H}_2)} = \frac{2,375 \cdot 10^{-6}}{2,752 \cdot 10^{-3} \cdot 2,402 \cdot 10^{-3}} \approx 0,36$$

$$u(|\hat{H}_1 - \hat{H}_2|) = \sqrt{(1 \quad -1) \mathbf{Q}_x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{8,595 \cdot 10^{-6}} = 2,932 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 2,9 \text{ mm}$$

Sammantaget: Höjderna på de nya punkterna skattas till $H_1 = 102,370 \text{ m}$ ($u(\hat{H}_1) = 2,8 \text{ mm}$) respektive $H_2 = 108,489 \text{ m}$ ($u(\hat{H}_2) = 2,4 \text{ mm}$). Mätningarnas standardosäkerhet skattas till $2,5 \text{ mm} / \sqrt{\text{km}}$. Korrelationskoefficienten mellan skattningarna av nypunkterna är $\rho = 0,36$ och standardosäkerheten i höjdskillnaden mellan dem är $u(|\hat{H}_1 - \hat{H}_2|) = 2,9 \text{ mm}$.

Om \hat{H}_1 och \hat{H}_2 hade varit okorrelerade hade skillnadens standardosäkerhet varit (jfr Exempel 9.7):

$$u(|\hat{H}_1 - \hat{H}_2|) = \sqrt{(1)^2 u^2(\hat{H}_1) + (-1)^2 u^2(\hat{H}_2)} = \sqrt{(1)^2 \cdot 2,752^2 + (-1)^2 \cdot 2,402^2} \approx 3,7 \text{ mm}$$

Men p.g.a. den **positiva** korrelationen så blir osäkerheten i skillnaden här något mindre.

Något som tydligt framgår av exemplet är att man bör vara generös med antalet siffror under beräkningarnas gång – särskilt vad gäller beräkningen av de obekanta och sådana parametrar som ingår i de fortsatta beräkningarna. Avrundning bör vara det allra sista man gör. Beträffande skalningen av ekvationssystemet finns det väl också en del i övrigt att önska – men mer om detta i nästa avsnitt.

9.5 Närmevärden och linjärisering

I det avslutande avsnittet berör vi några aspekter på minsta-kvadratmetoden, som ligger på gränsen till vad som var tänkt att ingå i detta kompendium. Så det är delvis att betrakta som ”överkurs”: kontentan är viktig att känna till men kanske inte alla detaljer. Formlerna i detta avsnitt återfinns därför inte i formelsamlingen.

9.5.1 Närmevärden

Vi såg i Exempel 9.11 att ekvationssystemet behövde skaleras. I avsnitt 9.3 gick vi igenom två metoder att göra det: subtrahera ett medelvärde och byta enhet. Här kommer en mer generell metod, som egentligen är en variant av de båda föregående: att införa *närmevärden* på de obekanta.

Låt oss skriva om observationsekvationerna 8.6 på följande sätt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + d\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{1} + \mathbf{v} &\Leftrightarrow \mathbf{A}d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A}d\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v} \\ &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{x}_1 \\ \vdots \\ d\hat{x}_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 8.27$$

där \mathbf{x}_0 är närmevärden på \mathbf{x} och $d\hat{\mathbf{x}}$ är de tillskott till närmevärdena som skattas i utjämnningen, så att

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + d\hat{\mathbf{x}} \quad 8.28$$

Storheten

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \quad 8.29$$

benämns *mättningsrest*. Vanligen byter man samtidigt enhet på mättningsresten. Lösningen blir (jfr formel 8.13):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\lambda} \Leftrightarrow d\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\lambda} \quad 8.30$$

varefter formel 8.28 ger svaret.

9.5.2 Ett alternativ till viktsmatris

Enligt formel 7.13 gäller att $p_i = 1/u^2(l_i)$. I matrisform kan det skrivas

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-2} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \quad 8.31$$

\Leftrightarrow

$$\begin{pmatrix} P_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & P_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2(l_1)} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{u^2(l_n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u(l_1)} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{u(l_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{u(l_1)} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{u(l_n)} \end{pmatrix}$$

Ett vanligt sätt att ersätta hanteringen med viktsmatris är att dividera varje observations-ekvation med resp. mättnings standardosäkerhet, vilket innebär att de ursprungliga observationsekvationerna 8.6 övergår i *normerade observations-ekvationer*:

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{1} + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A}_* \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{1}_* + \mathbf{v}_* \quad 8.32$$

med normalekvationerna (jfr 8.8 och 8.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_*^T \mathbf{A}_* \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_*^T \mathbf{1}_* \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{1} \Leftrightarrow \\ \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-2} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-2} \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1} \end{aligned} \quad 8.33$$

och lösningen $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_*^T \mathbf{A}_*)^{-1} \mathbf{A}_*^T \mathbf{1}_* = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{1}$. Förbättringarna blir:

$$\mathbf{Q} \mathbf{v}_* = \mathbf{Q} (\mathbf{A}_* \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{1}_*) \Leftrightarrow \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{1} \quad 8.34$$

dvs. man går tillbaka till ursprungsekvationerna eller också multiplicerar man de förbättringar man får ur utjämnningen med motsvarande mättnings standardosäkerhet. Viktsenhetens standardosäkerhet ges av (jfr 8.9 och 8.14).

$$u_P = \sqrt{\frac{\mathbf{v}_*^T \mathbf{v}_*}{n-m}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}}{n-m}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-2} \mathbf{v}}{n-m}} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-m}} \quad 8.35$$

Exempel 9.12: Beräkna avvägningssätet i Exempel 9.11 m.h.a. närmevärden och normerade observationsekvationer.

Lösning: Vi beräknar närmevärdena genom att använda tåg I och II:

$$H_{o1} = H_{102} - l_2 = 102,365$$

$$H_{o2} = H_{101} + l_1 = 108,498$$

Det ger enligt formel 8.27:

$$\mathbf{A} d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A} d\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{H}_1 \\ d\hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108,498 \\ -102,365 \\ -108,489 \\ -102,373 \\ 6,117 \\ -108,487 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{o1} \\ H_{o2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & +1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{H}_1 \\ d\hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,9 \\ -0,8 \\ -1,6 \\ 1,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

där enheten för mätningsrest och förbättringar har ändrats till cm, vilket innebär att även $d\hat{H}_1$ och $d\hat{H}_2$ kommer att få cm som enhet.

För divisionen med standardosäkerheten väljer vi formeln vi fick i Exempel 9.11:

$$u(l_i) = 2,5 \text{ mm} / \sqrt{km} = 0,25 \text{ cm} / \sqrt{km}, \text{ dvs.}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{Q}_{66}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u(l_1)} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{u(l_6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,569 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,138 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,886 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,138 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,530 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,828 \end{pmatrix}$$

Det ger de normerade observationsekvationerna 8.32:

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l} + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A}_* \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l}_* + \mathbf{v}_*$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1,569 \\ -2,138 & 0 \\ 0 & -1,886 \\ -2,138 & 0 \\ -2,530 & +2,530 \\ 0 & -2,828 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{H}_1 \\ d\hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 1,6974 \\ -1,7104 \\ -4,0480 \\ 3,1108 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{*1} \\ v_{*2} \\ v_{*3} \\ v_{*4} \\ v_{*5} \\ v_{*6} \end{pmatrix}$$

och normalekvationerna 8.33:

$$\mathbf{A}_*^T \mathbf{A}_* d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_*^T \mathbf{l} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{pmatrix} 15,543 & -6,401 \\ -6,401 & 20,417 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{H}_1 \\ d\hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,8983 \\ -22,2401 \end{pmatrix}$$

med lösningen:

$$\begin{pmatrix} d\hat{H}_1 \\ d\hat{H}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{276,3686} \begin{pmatrix} 20,417 & 6,401 \\ 6,401 & 15,543 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13,8983 \\ -22,2401 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5116 \\ -0,9289 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,9 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

De definitiva höjderna blir alltså: $\hat{H}_1 = 102,365 + 0,005 = 102,370$ m och $\hat{H}_2 = 108,498 - 0,009 = 108,489$ m, dvs. samma resultat som i Exempel 9.11.

De normerade förbättringarna beräknar vi ur

$$\mathbf{v}_* = \mathbf{A}_* \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}_* \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_{*1} \\ v_{*2} \\ v_{*3} \\ v_{*4} \\ v_{*5} \\ v_{*6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1,569 \\ -2,138 & 0 \\ 0 & -1,886 \\ -2,138 & 0 \\ -2,530 & +2,530 \\ 0 & -2,828 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5116 \\ -0,9289 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 1,6974 \\ -1,7104 \\ -4,0480 \\ 3,1108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,4574 \\ -1,0938 \\ 0,0545 \\ 0,6166 \\ 0,4035 \\ -0,4839 \end{pmatrix}$$

Genom multiplikation med resp. standardosäkerhet (formel 8.34) får vi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{v}_* = \begin{pmatrix} -0,929 \\ -0,512 \\ 0,029 \\ 0,288 \\ 0,160 \\ -0,171 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

Återigen samma resultat som i Exempel 9.11. Viktsenhetens standardosäkerhet ges av formel 8.35:

$$u_p^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-m} = \frac{\mathbf{v}_*^T \mathbf{v}_*}{n-m} \approx \frac{4,10}{4} \approx 1,025; \quad u_p \approx \sqrt{1,025} \approx 1,0$$

Kapitel 9: Minsta-kvadratberäkningar med matriser

Att vi får $u_p \approx 1,0$ beror på att vi som **indata** vid normeringen använde de standard-osäkerheter som vi fick som **utdata** i Exempel 9.11. Vi använder så att säga facit som indata. Överhuvudtaget är u_p en bra indikator på att de antagna standard-osäkerheterna är korrekta när man sätter vikter enligt formel 8.31. Värderna skilda från ett visar att motsäkerheten är högre ($u_p > 1,0$) eller lägre ($u_p < 1,0$) än vad som antagits. Det kan bero på en generell skillnad eller på att enskilda mätningar avviker, t.ex. p.g.a. grova mätfel. Om $u_p \approx 1,0$ bör antagandena kunna betraktas som korrekta.

Nu kan vi beräkna hela varians-kovariansmatrisen.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_x &= u_p^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} u^2(\hat{H}_1) & u(\hat{H}_1, \hat{H}_2) \\ u(\hat{H}_2, \hat{H}_1) & u^2(\hat{H}_2) \end{pmatrix} = \frac{1,025}{276,3686} \begin{pmatrix} 20,417 & 6,401 \\ 6,401 & 15,543 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,0757 & 0,0237 \\ 0,0237 & 0,0576 \end{pmatrix} \text{cm}^2 = 10^{-6} \begin{pmatrix} 7,57 & 2,37 \\ 2,37 & 5,76 \end{pmatrix} \text{m}^2 \end{aligned}$$

Dvs. resultatet är samma som i Exempel 9.11 ännu en gång. Sammantaget: metoderna ger samma resultat, men i denna senare metod krävs färre signifikanta siffror i beräkningarna eftersom ekvationssystemet har en bättre skalning.

9.5.3 Linjärisering

Hittills har alla ekvationer förutsatts utgå från *linjära funktioner*. Det är därför som det i exemplen har handlat mycket om höjdnät, som är linjära till sin struktur. Plana stornät, såsom triangelnät, är inte det. En typisk *olinjär funktion* är ett avstånd beräknat ur ändpunkternas koordinater, som ger följande observationsekvation för en avståndsmätning från punkt A till B (jfr formel 6.3)

$$\begin{aligned} d_{AB}(N_A, E_A, N_B, E_B) &= \sqrt{(N_B - N_A)^2 + (E_B - E_A)^2} = \\ &= \sqrt{\Delta N^2 + \Delta E^2} = l + v \end{aligned} \quad 8.36$$

Genom Taylorutveckling kan vi approximera den olinjära funktionen med ett linjärt uttryck:

$$\begin{aligned} d_{AB}(N_A, E_A, N_B, E_B) &\approx \\ &\approx l_0 + \frac{\delta d_{AB}}{\delta N_A} dN_A + \frac{\delta d_{AB}}{\delta E_A} dE_A + \frac{\delta d_{AB}}{\delta N_B} dN_B + \frac{\delta d_{AB}}{\delta E_B} dE_B \end{aligned} \quad 8.37$$

där

$$l_0 = \sqrt{(N_{0B} - N_{0A})^2 + (E_{0B} - E_{0A})^2} = \sqrt{\Delta N_0^2 + \Delta E_0^2} \quad 8.38$$

och $N_{0A}, E_{0A}, N_{0B}, E_{0B}$ är närmekoordinater för ändpunkterna.

Derivatorna är

$$\frac{\delta d_{AB}}{\delta N_A} = -\frac{\Delta N_0}{l_0}; \quad \frac{\delta d_{AB}}{\delta E_A} = -\frac{\Delta E_0}{l_0}; \quad \frac{\delta d_{AB}}{\delta N_B} = \frac{\Delta N_0}{l_0}; \quad \frac{\delta d_{AB}}{\delta E_B} = \frac{\Delta E_0}{l_0} \quad 8.39$$

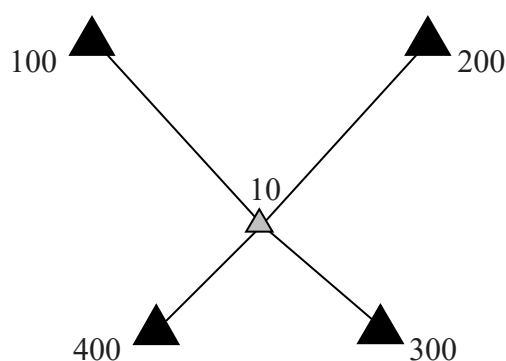
vilket ger de linjära observationsekvationerna:

$$-\frac{\Delta N_o}{l_o} d\hat{N}_A - \frac{\Delta E_o}{l_o} d\hat{E}_A + \frac{\Delta N_o}{l_o} d\hat{N}_B + \frac{\Delta E_o}{l_o} d\hat{E}_B = \lambda + v \quad 8.40$$

där $\lambda = l - l_o$ är mättningsresten. När man bildar normalekvationerna tillämpar man dessutom tekniken med att dividera med standardosäkerheten enligt avsnitt 9.5.2. Om man har dålig kunskap om närmevärdena kan utjämningsberäkningen behöva upprepas – med successivt förbättrade närmevärden tills systemet konvergerar, dvs. tills storheterna dN_A , dE_A , dN_B , dE_B är noll.

Exempel 9.13: Beräkna koordinaterna för den fria stationen 10 ur de fyra avståndsmätningarna från närliggande brukspunkter. Stationens närmekoordinater $(N_{o10}, E_{o10}) = (300, 300)$ m.

Kända punkter			Mätdata			
Punkt nr.	N (m)	E (m)	Från	Till	Avstånd (meter)	Standardosäkerhet (cm)
100	500,000	100,000				
200	500,000	500,000				
300	200,000	400,000				
400	200,000	200,000				
			100	10	282,815	1,5
			200	10	282,843	1,5
			300	10	141,407	1,0
			400	10	141,432	1,0



Lösning: Vi beräknar först derivator och mättningsrester. Vi väljer cm som enhet för mättningsresten – och standardosäkerheterna – för att få en bra skalning av ekvationssystemet. Här har vi bara två obekanta: dN_{10} och dE_{10} .

Från	Till	$\Delta N_o =$ $= N_{Till} - N_{Från}$	$\Delta E_o =$ $= E_{Till} - E_{Från}$	$l_o =$ $= \sqrt{\Delta N_o^2 + \Delta E_o^2}$	$\frac{\delta d}{\delta N_{Till}}$	$\frac{\delta d}{\delta E_{Till}}$	$\lambda = l - l_o$ (cm)
100	10	-200	200	282,84271	-0,7071	0,7071	-2,771
200	10	-200	-200	282,84271	-0,7071	-0,7071	0,029
300	10	100	-100	141,42136	0,7071	-0,7071	-1,436
400	10	100	100	141,42136	0,7071	0,7071	1,064

Kapitel 9: Minsta-kvadratberäkningar med matriser

Det ger oss observationsekvationerna:

$$-0,7071d\hat{N}_{10} + 0,7071d\hat{E}_{10} = -2,771 + v_1$$

$$-0,7071d\hat{N}_{10} - 0,7071d\hat{E}_{10} = 0,029 + v_2$$

$$0,7071d\hat{N}_{10} - 0,7071d\hat{E}_{10} = -1,436 + v_3$$

$$0,7071d\hat{N}_{10} + 0,7071d\hat{E}_{10} = 1,064 + v_4$$

som efter division med resp. mättnings standardosäkerhet övergår i normerade observationsekvationer:

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}$$

⇔

$$\mathbf{A}_*d\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\lambda}_* + \mathbf{v}_* \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0,4714 & +0,4714 \\ -0,4714 & -0,4714 \\ +0,7071 & -0,7071 \\ +0,7071 & +0,7071 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{N}_{10} \\ d\hat{E}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,847 \\ +0,019 \\ -1,436 \\ +1,064 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{*1} \\ v_{*2} \\ v_{*3} \\ v_{*4} \end{pmatrix}$$

(jfr formel 8.32). Normalekvationerna blir:

$$\begin{pmatrix} 1,4444 & 0 \\ 0 & 1,4444 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\hat{N}_{10} \\ d\hat{E}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5987 \\ 0,8881 \end{pmatrix}$$

med lösningen

$$\begin{pmatrix} d\hat{N}_{10} \\ d\hat{E}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,414 \\ 0,615 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

dvs. samma enhet som mättningsresten och standardosäkerheterna. Koordinaterna på den fria stationen 10 blir alltså:

$$\begin{pmatrix} \hat{N}_{10} \\ \hat{E}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{o10} \\ E_{o10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\hat{N}_{10} \\ d\hat{E}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300,00414 \\ 300,00615 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 300,004 \\ 300,006 \end{pmatrix} \text{ meter}$$

Förbättringarna kan beräknas ur det olinjära sambandet (10.36), med de nyss skattade koordinaterna för punkt 10 i stället för de närmekoordinater som användes vid beräkning av mättningsresten. Det går också att använda det linjäriserade ekvationssystemet 10.40 eller dess normerade variant.

Dvs.

$$v = \sqrt{\Delta N^2 + \Delta E^2} - l$$

⇔

$$v_1 = 282,84413 - 282,815 = 2,913 \text{ cm}$$

$$v_2 = 282,83544 - 282,843 = -0,756 \text{ cm}$$

$$v_3 = 141,41994 - 141,407 = 1,294 \text{ cm}$$

$$v_4 = 141,42863 - 141,432 = -0,337 \text{ cm}$$

eller

$$\mathbf{v}_* = \mathbf{A}_* d\hat{\mathbf{x}} - \lambda_* \Rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{v}_* = \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}d\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}^{-1}\lambda) = \mathbf{A}d\hat{\mathbf{x}} - \lambda = \mathbf{v}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$v_{*1} = 1,942 \Rightarrow v_1 = 1,5 \cdot 1,942 = 2,913 \text{ cm}$$

$$v_{*2} = -0,504 \Rightarrow v_2 = 1,5 \cdot (-0,504) = -0,756 \text{ cm}$$

$$v_{*3} = 1,294 \Rightarrow v_3 = 1,0 \cdot 1,294 = 1,294 \text{ cm}$$

$$v_{*4} = -0,336 \Rightarrow v_4 = 1,0 \cdot (-0,336) = -0,336 \text{ cm}$$

Att de två beräkningsvägarna ger samma resultat visar att närmekoordinaterna var tillräckligt bra.

Viktsenhetens standardosäkerhet skattar vi till

$$u_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 v_i^2 / u^2(l_i)}{n-m}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 v_{*i}^2}{n-m}} = \sqrt{\frac{5,812712}{4-2}} = 1,7048 \Rightarrow u_p^2 = 2,906$$

vilket ger varians-kovariansmatrisen

$$u_p^2(\mathbf{A}_*^T \mathbf{A}_*)^{-1} = u_p^2(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-2} \mathbf{A})^{-1} = u_p^2(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = 2,906 \begin{pmatrix} \frac{1}{1,4444} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1,4444} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,012 & 0 \\ 0 & 2,012 \end{pmatrix}$$

Dvs. $u(\hat{N}_{10}) = u(\hat{E}_{10}) = \sqrt{2,012} \approx 1,4 \text{ cm}$. Uttrycket $\sqrt{u^2(\hat{N}_{10}) + u^2(\hat{E}_{10})} = \sqrt{2,012 + 2,012} \approx 2,0 \text{ cm}$ benämns *standardosäkerheten i plan* (se Tabell 8.3).

Dags att reflektera: Viktsenhetens standardosäkerhet blev 1,70, dvs. mätosäkerheten är högre än vad vi antog. Det ligger precis under gränsen i HMK (där benämnt "grundmedelfel", gamla HMK-Stommätning Tabell A.7, 2 överbestämningar, gränsvärde 1,73). Standardosäkerheten i plan, 20 mm, ligger över HMK-gränsen för bestämning av brukspunkter med fri station (där benämnt "punktmedelfel", gamla HMK-Stommätning Tabell A.15, gränsvärde 14 mm). Dessutom är förbättringen till det mätta avståndet 100 → 10 ganska stor, 29 mm. Den mätningen skulle definitivt flaggas för "grovt fel" av en statistisk felsökningsalgoritm.

Slutsatsen blir ommätning! Den flaggade mätningen (100 → 10) är troligen orsaken till det bristfälliga resultatet.

I hanteringen av olinjära samband beträffande vinkelmätning ingår ytterligare en komplexitet: att vinkelenheter måste konverteras till radianer – men det får bli ämnet för en fortsättningskurs i detta ämne.

Kapitel 9: Minsta-kvadratberäkningar med matriser

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021 (men bara mindre ändringar gjordes).

Lästips: Det svenska standardverket vad gäller matrisalgebra i samband geodetiska minsta-kvadratberäkningar är Bjerhammar(1973). Den är dock skriven på engelska, men den svenskspråkiga föregångaren Bjerhammar(1967) är slut på förlaget. Ha HMK-Stommätning till hands vid läsningen av kapitlet.

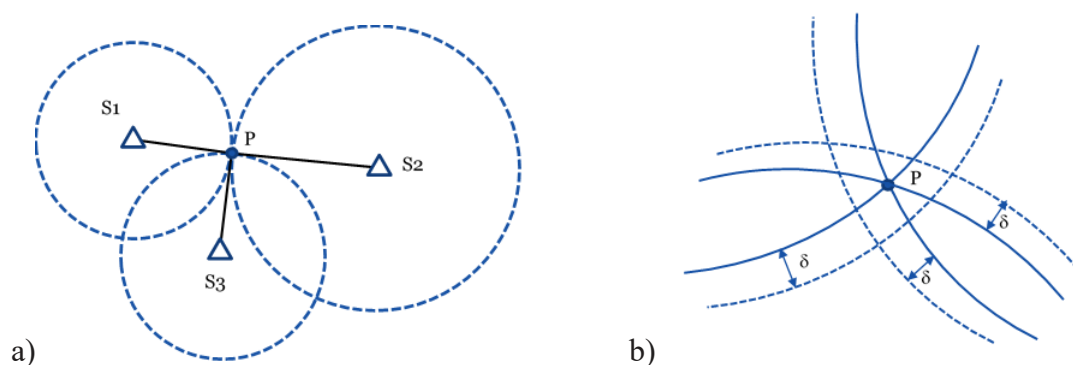
10 GNSS

GNSS (Global Navigation Satellite Systems) är ett samlingsnamn för alla satellitbaserade navigeringssystem. Idag (2021) finns det fyra sådana system: det amerikanska GPS (Global Positioning System), det ryska GLONASS (GLObal NAVigation Satellite System), det kinesiska BEIDOU och det europeiska GALILEO. Förutom navigering kan dessa system även användas för noggrann positionsbestämning, d.v.s. för *satellitmätning*. Detta kapitel förklarar grundläggande principer för satellitmätning, uppbyggnad av GNSS, felkällor och matematiska modeller för positionsbestämning m.h.a. satellitmätning.

Vissa termer har markerats i avsnittet; dessa förklaras i ordlistan i slutet av kapitlet.

10.1 Grundläggande princip för satellitmätningar

Den grundläggande principen för satellitmätning kan jämföras med principen för *inbindning*. Vid inbindning bestämmer man horisontella koordinater för totalstationen genom att mäta avstånd mot minst två stompunkter. Avståndet mäts genom att mäta den tid det tar för en laserpuls att åka från instrumentet till en måltavla och tillbaka. Vid satellitmätning bestämmer man 3D-koordinater för en mottagare som mäter avstånd mot minst fyra satelliter, vilka betraktas som kända stompunkter. Avståndet bestäms genom att mäta gångtiden för satellitsignalen. Gångtiden bestäms som skillnaden mellan mottagningstiden (mäts av mottagarens klocka) och tiden som signalen skickades från satelliten (mäts av satellitens klocka). Den bestämda gångtiden påverkas av synkroniseringsfel mellan klockorna. Detta tidsfel är lika stort för mätning mot alla satelliter, eftersom det är bara mottagarens klocka som ”går fel”; satelliternas klockor är noggranna atomklockor som är synkroniserade mot varandra. Synkroniseringsfelet orsakar fel i de bestämda avstånden och det måste beräknas (skattas) tillsammans med koordinaterna. Av denna anledning behöver man mäta avståndet mot minst fyra satelliter (för att skatta 3 koordinater + 1 synkroniseringsfel) – se Figur 10.1.



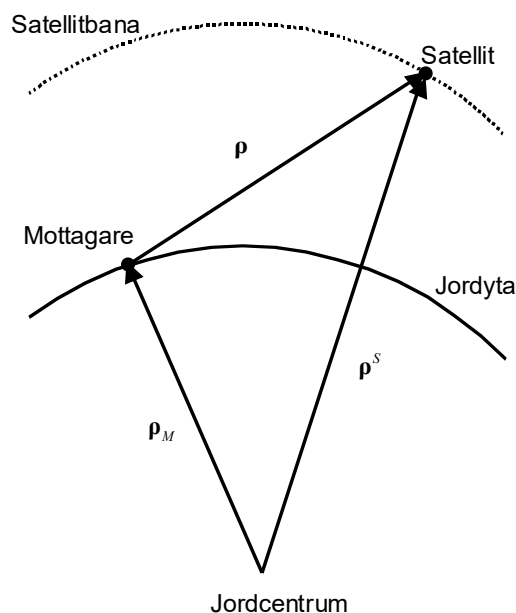
Figur 10.1. Principen för satellitpositionering liknar inbindning. a) Totalstationen (GNSS-mottagaren) P mäter avstånd mot tre stompunkter (satelliter). Koordinaterna för P bestäms genom inbindning. b) Alla avstånd är behäftade med samma fel δ som måste skattas tillsammans med koordinaterna för P . δ kan vara en obekant prismakonstant vid totalstationsmätning och δ är ett synkroniseringsfel (=mottagarens klockfel) vid satellitmätning. Observera att detta är en 2D-illustration. I realiteten är cirkelarna i a) sfärer och man behöver mäta mot minst 4 satelliter för att bestämma 3D-koordinaterna och synkroniseringsfelet δ .

Den grundläggande observationsekvationen för satellitmätning kan förklaras m.h.a. Figur 10.2. Mottagarna mäter avstånden $|\rho|$ mot tillgängliga satelliter som har noggrant bestämda banparametrar. Därmed kan deras koordinater ρ^S beräknas för varje mättillfälle. Mottagarnas koordinater ρ_M kan beräknas genom att lösa

ekvationssystemet⁴ (en ekvation för varje satellit):

$$|\boldsymbol{\rho}| = |\boldsymbol{\rho}^S - \boldsymbol{\rho}_M| \quad 9.1$$

Denna princip eller metod benämns ”dynamisk” eftersom den bygger på kända satellitpositioner. Man kan också utnyttja satelliterna bara som punkter i rymden, utan att behöva beräkna deras koordinater, vilket kallas för ”geometrisk” metod. Denna användes redan på 60-talet för att binda ihop referenssystem på olika kontinenter. Metoden, också känd som *stjärntriangulering*, använder sig av kameror som fotograferar satelliterna med stjärnhimlen som bakgrund. På så sätt kan man beräkna en enhetsvektor mellan kamera och satellit. Om man mäter samtidigt med två eller flera kameror, kan man även beräkna enhetsvektorer mellan kamerastationerna. Denna metod är inte lämplig för navigering eller ”vardagsmätning” p.g.a. dyr utrustning, långa observationstider och komplicerad databehandling. Av bland annat denna anledning utvecklade både USA och Sovjetunionen på 1960- och 70-talet navigeringssystem som baserade på den dynamiska metoden. Dessa var nästan uteslutande avsedda för militärt bruk. Mottagarna mätte dopplerförskjutningen av satellitsignaler, som räknades om till den radiella hastigheten mellan mottagare och satellit. Amerikanska TRANSIT och ryska TSAKIDA var de första satellitbaserade, globala navigeringssystemen som gav position och hastighet efter bara några minuters observationer. Positionsosäkerheten var 100–200 m och tillgängligheten var inte kontinuerlig – på vissa ställen på jorden fick man vänta på satelliterna i minuter eller t.o.m. timmar. Det var anledningen till att utveckla satellitnavigeringssystem som kunde ge bättre noggrannhet, global täckning och kontinuerlig tillgänglighet.



Figur 10.2. Princip för satellitpositionering. Mottagarens koordinater $\boldsymbol{\rho}_M$ bestäms ur mätt avstånd $|\boldsymbol{\rho}|$ och kända satellitkoordinater $\boldsymbol{\rho}^S$.

USA beslutade att utveckla ett sådant system 1973. Systemet fick namnet NAVSTAR GPS (NAVSTAR = NAVigation System with Timing And Ranging) och var designat som ett militärt system. Det öppnades dock upp för civila användare 1983 efter en incident med ett koreanskt flygplan som skjutits ned p.g.a. felnavigering över förbjudet

⁴ Fler detaljer i kapitel 10.6

sovjetisk luftrum. All teknisk dokumentation (eng. interface control documents) om den civila GPS-signalen är publicerad, så vem som helst kan bygga och använda GPS-mottagare utan något tillstånd eller några avgifter. Dokumenten kan laddas ned från den officiella [GPS-webbsidan](#). Första GPS-satelliten sköts upp 1979 och systemet förklarades komplett ("Full Operational Capability") 1995. Som redan nämnts utnyttjar alla andra GNSS samma positioneringsprincip, men det finns vissa implementeringsdetaljer som är olika mellan systemen, t.ex. signalfrekvenserna, arbetsreferenssystemen, satellitbanparametrarna o.s.v. Avsikten här är inte att beskriva alla dessa detaljer för alla GNSS, utan bara det viktigaste för att illustrera principen.

10.2 Uppbyggnad av GNSS

Ett GNSS består av tre delar eller "segment":

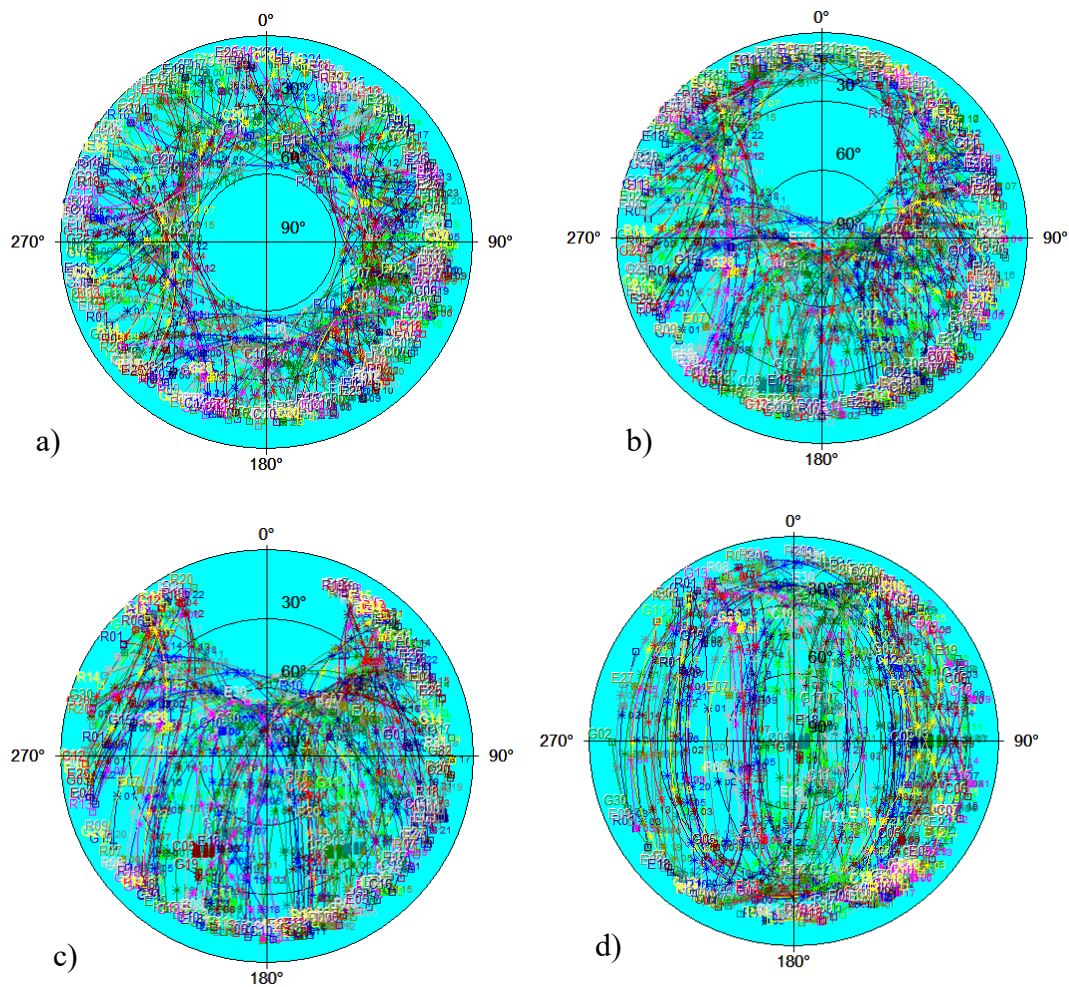
- Rymdsegmentet – satelliter
- Kontrollsegmentet – spårstationer, ledningscentral
- Användarsegmentet – GNSS-mottagare.

10.2.1 Rymdsegmentet

Rymdsegmentet för ett GNSS består av ett antal satelliter som kretsar runt jorden i förbestämda banor. Tabell 10.1 visar antalet satelliter, medelflyghöjd, inklinationsvinkel och antalet frekvenser för individuella GNSS. Antalet satelliter kan variera, eftersom systemen moderniseras kontinuerligt, nya satelliter skickas upp medan de gamla fortfarande fungerar. Varje GNSS har valt antal satelliter och en konfiguration som garanterar att det överallt på jorden alltid syns minst fyra satelliter, vilket är minimum för 3D-positionering. Satellitbanorna är elliptiska med liten avplattning, vilket gör att flyghöjden inte varierar mycket. Omloppstiden är ca 12 timmar och därför upprepas [satellitgeometrin](#) observerad från en viss plats efter ca 24 timmar. Satellitbanorna ligger i ett plan som lutar mot ekvatorsplanet; lutningsvinkeln kallas *inklination*. Eftersom denna vinkel ligger mellan 55 och 65 grader, finns det ett "hål", d.v.s. ett cirkulärt område på himlen där det aldrig finns några GNSS-satelliter. Vid nord- och sydpolen finns detta "hål" runt zenit och det förflyttar sig norrut om man flyttar observationsplatsen söderut från nordpolen – se Figur 10.3. En praktisk konsekvens för användare i Sverige är att man bör välja sådana platser för GNSS-mätningar där det inte finns några hinder (byggnader, träd...) söderut. Objekten norr om observationsplatsen kommer inte att påverka mätningen på ett signifikant sätt.

Tabell 10.1. Rymdsegment för olika GNSS.

	GPS	Galileo	GLONASS	Beidou
Antal satelliter	30	30	24	32
Flyghöjd [km] (medel)	20 200	23 200	19 100	21 500
Inklination [°]	55	56	65	55
Antal civila frekvenser	3	4	3	4



Figur 10.3. GNSS-satellitbanor ritade för olika breddgrader: a) nordpolen (0°), b) Stockholm (59°), c) Athen (38°), d) ekvatorn (90°). Varje linje representerar en GNSS-satellitbana under ett dygn. Cirklarna representerar höjder över horisonten och linjerna representerar syd-norr och väst-öst riktning.

GNSS-satelliten är en plattform som bär radiosändare/mottagare, noggrann atomklocka, datorer och annan utrustning som behövs för satellitstyrning. Atomklockan genererar en mycket stabil frekvens, den s.k. *fundamentalfrekvensen* f_0 . GPS-satelliterna använder till exempel $f_0 = 10,23$ MHz och den ligger till grund för tre *bärfrekvenser*: $L1 = 154 f_0 = 1575,42$ MHz (våglängd $\lambda_1 = 0,19$ m), $L2 = 120 f_0 = 1227,60$ MHz, (våglängd $\lambda_2 = 0,24$ m) och $L5 = 115 f_0 = 1176,45$ MHz (våglängd $\lambda_5 = 0,25$ m). Bärfrekvenser för alla GNSS finns t.ex. i [ESA Navipedia](#). På bärfrekvenserna moduleras digitala dataströmmar: koder för avståndsmätning (t.ex. *C/A-kod* och *P-kod* för GPS) och ett *navigeringsmeddelande*. Varje dataström är en sekvens av binära ettor och nollor som kodar informationen. Koder för avståndsmätning används för att bestämma avståndet mellan satelliten och mottagaren och navigeringsmeddelandet innehåller information som är nödvändig för positionsberäkning.

Varje satellit skickar sitt eget, unika navigeringsmeddelande, som innehåller *utsända banddata* (eng. broadcast *ephemeris*), klockfel, ”almanacksdata”, differens mellan GPS- och UTC-tid, parametrar för en jonosfärmodell samt statusflagga för alla GNSS-satelliter. Med hjälp av utsända banddata kan mottagaren beräkna satellitens koordinater

med en osäkerhet på ca 1–3 m. Koordinaterna beräknas i respektive referenssystem, t.ex. WGS 84 är standardreferenssystemet för GPS. *Almanacksdata* är en förkortad version av bandata; varje satellit skickar sådana data för alla satelliter inom respektive system. De används för approximativ beräkning av satellitpositionerna (osäkerhet 100–300 m) för att kunna bestämma vilka satelliter som är synliga för en given plats och tid.

10.2.2 Kontrollsegmentet

Kontrollsegmentet består av ett antal *kontrollstationer* placerade runt om hela jorden (GPS, Galileo) eller inom landets territorium (GLONASS, Beidou). En av dem är huvudledningscentralen och de andra är spårningsstationer utrustade med GNSS-mottagare med kända koordinater och utrustning för satellit-datakommunikation. Det möjliggör skattning av banparametrar och satellitklockkorrektioner, som laddas upp till satelliterna för att sedan distribueras till användarna via navigeringsmeddelandet. Kontrollstationerna ansvarar också för underhållet av satelliterna, dvs. för att åtgärda eventuella instrumentfel och hålla satelliterna i sina planerade banor.

Nämnas bör att det också finns andra ”kontrollstationer”, dvs. permanenta GNSS-stationer som kontinuerligt samlar mätningar mot alla tillgängliga GNSS-satelliter. Dessa mätningar bearbetas sedan av olika organisationer (t.ex. av IGS – International GNSS service) och resultatet i form av bl.a. *precisa bandata* (eng. *precise ephemeris*) görs fritt tillgängligt via internet.

10.2.3 Användarsegmentet

Användarsegmentet utgörs av alla mottagare som tar emot GNSS-signaler. Man kan förenklat beskriva en GNSS-mottagares funktion på följande sätt: en GNSS-antenn tar emot signaler från alla tillgängliga satelliter; signalen förstärks sedan och konverteras om till en lägre frekvens. I nästa steg blandas signalen med en avståndsmättningskod genererad i mottagaren, vilket är nödvändigt för att dels avläsa navigationsmeddelandet, dels bestämma avståndet mot satelliten. De flesta GNSS-mottagare är utrustade med en bearbetningsmodul som beräknar position, hastighet och mottagarens klockfel. Det finns många olika typer och utformningar av GNSS-mottagare. De enklaste mottagarna som används t.ex. för bilnavigering mäter bara [pseudoavstånd](#) m.h.a. en kod på en bärfrekvens. GPS-mottagare som används för militär navigering använder speciell kod som inte är tillgänglig för civila användare (Y-kod) på två eller flera frekvenser. De mest avancerade, geodetiska, mottagarna som används för noggrann mätning utför såväl kod- som [fasmätningar](#) på en eller flera bärfrekvenser. De flesta moderna mottagare kan samtidigt ta emot signaler från två eller flera GNSS, men det finns även specialiserade mottagare bara för ett system, t.ex. bara GPS.

Kodmätning

Varje GNSS-mottagare genererar avståndsmättningskod för alla satelliter. Avståndsmättningskoder är unika för individuella satelliter. Detta gäller för alla system utom GLONASS, där alla satelliter använder samma kod, men varje satellit har en individuell bärfrekvens. Kodgeneratoren styrs av en kvartsklocka, alltså en mycket enklare (billigare) och osäkrare klocka jämfört med satelliternas atomklockor.

Den grundläggande principen för kodmätning visas i Figur 10.4. Mottagaren förflyttar den genererade sekvensen tills den matchar med den mottagna sekvensen. Den erhållna förflyttningen räknas sedan om till signalens gångtid Δt , alltså den tid det tog för signalen att gå från satelliten till mottagaren. Observera att den uppmätta gångtiden

innehåller mottagarens klockfel δ_M samt satellitens klockfel. Det senare är förhållandevis litet och visas inte i figuren.

Gångtiden Δt multiplicerat med ljushastigheten c kallas för *pseudoavstånd*. Ordet ”pseudo” pekar på att pseudoavståndet skiljer sig mycket från det riktiga avståndet, ibland tiotals km, eftersom även ett litet klockfel ger ett stort fel i avståndet. Osäkerheten för bestämning av pseudoavståndet i mottagaren är ca 30 cm.

De flesta moderna GNSS-mottagare har minst 8–12 kanaler, vilket betyder att mottagaren kan mäta mot upp till 8–12 satelliter samtidigt. När mottagaren har lyckats hitta korrelationen, subtraheras koden från den mottagna signalen, vilket är nödvändigt för att kunna läsa navigeringsmeddelandet och sedan rekonstruera bärsignalen.



Figur 10.4. Kodmätning. Mottagaren förskjuter genererad signal tills den matchar (korrelerar) mottagen signal. Längden av förskjutningen motsvarar signalens gångtid (Δt). δ_M betecknar mottagarens klockfel, vilket direkt påverkar bestämning av Δt . Satellitens klockfel är mycket mindre, därför visas det inte i figuren.

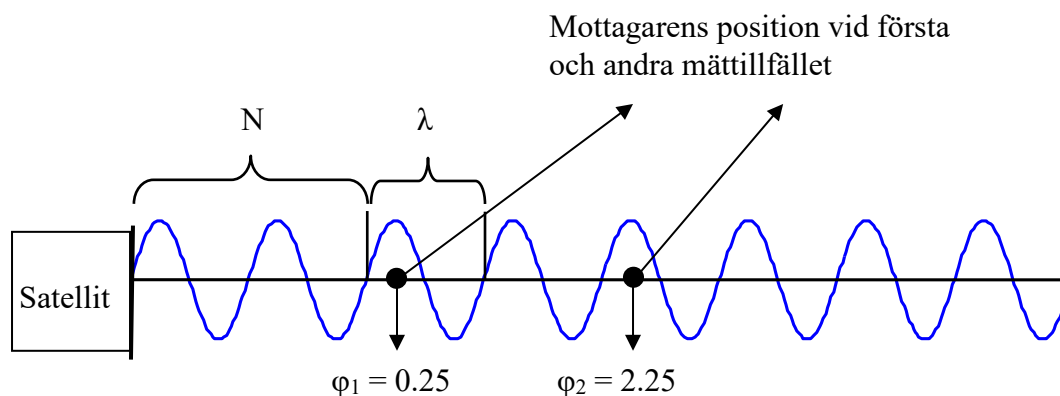
Fasmätning

Efter kodmätningen, överförs bärsignalen till den s.k. PLL-modulen (Phase Lock Loop) som utför fasmätning. Denna modul finns vanligtvis bara i mer avancerade, geodetiska GNSS-mottagare. Det är nämligen fasmätning som möjliggör positionsbestämning med mm- till cm-osäkerhet.

Geometriskt kan fasmätning förklaras utifrån Figur 10.5. I början mäter PLL fas φ_1 , som motsvarar placeringen av GNSS-antennen inom en våglängd. Avståndet mellan mottagare och satellit kan beräknas som summan av fasmätningen och antalet hela våglängder N . N benämns i engelskspråkig litteratur ”initial phase ambiguity”, som på svenska översätts till *periodobekant*, eller periodkonstant.

Notera att N alltid är ett heltal, som är okänt och måste beräknas med hjälp av andra fas- och/eller kodobservationer. Eftersom satelliten och mottagaren alltid är i relativ rörelse så förändras fasan över tiden. Om mottagaren spårar signalen oavbrutet, kan den räkna upp antalet hela våglängder som har gått sedan starten, så t.ex. i Figur 10.5 är fasmätningen i nästa epok (mättillfälle) $\varphi_2 = 2,25$. Om signalen avbryts, t.ex. vid passage under en bro, så tappar mottagaren räkningen. Detta kallas för *periodbortfall* (eng. *cycle slip*). Då måste fasmätningen startas om från början, dvs. en ny periodobekant N gäller. I vårt exempel i Figur 10.5 skulle mottagaren visa $\varphi_2 = 0,25$ om signalen hade avbrutits precis mellan epok 1 och 2. Det kan hända att mottagaren inte upptäcker periodbortfallet och att den missar ett visst antal hela våglängder. Därför

måste alla fasmätningar kontrolleras för eventuella periodbortfall. Osäkerheten vid fasmätning i PLL är ca 2 mm. Det betyder att man kan bestämma avståndet mellan satellit och mottagare med mm precision om man kan bestämma rätt värde för N och eliminera påverkan av olika felkällor.



Figur 10.5. Fasmätning. φ_1 = fasmätning i första epoken, φ_2 = fasmätning i nästa epok, λ = våglängd.
Avstånd mellan satelliten och mottagaren = $N + \lambda\varphi$.

10.3 Avsiktliga störningar i satellitsignalen

GPS-satelliterna har två verktyg för att skilja på auktoriserade och ”alla andra” användare. Det första heter ”*Selective Availability*” (SA) och den andra ”*Anti Spoofing*” (AS). SA förvanskar de banparametrar och satellitklockkorrektioner som skickas ut via navigeringsmeddelandet. Detta orsakar att användarens mottagare beräknar felaktiga satellitkoordinater och felaktig satellittid – som resulterar i positionsfel som kan bli större än 100 m. SA kan slås på och av för varje satellit individuellt. Sedan maj 2000 är SA avstängd på alla satelliter och USA:s regering har deklarerat att de inte har någon avsikt att slå den på igen. Utan SA har militära och civila mottagare ungefär samma mätosäkerhet.

GNSS-mätning kan relativt enkelt störas genom att man skickar en starkare signal som liknar GNSS-signalen, alltså en signal som är modulerad med avståndsmätningsskoder. För att förhindra störning av militära mottagare har GPS-satelliterna implementerat verktyget AS. Det kodar om P-kod till en hemlig Y-kod, som är svår att imitera. Sedan 1995 är AS aktiverat på alla satelliter. Detta gör att civila användare inte kan utnyttja P-kod för navigering. Geodetiska mottagare använder olika metoder för att rekonstruera P-koden, men sådan rekonstruerad mätning har större brus jämfört med mätning med P- eller Y-kod i original. För mer detaljer se t.ex. Hoffman-Wellenhof et al. (2007).

10.4 Observationsekvationer

GNSS-mottagarna genererar kodmätningar eller kod- och fasmätningar på en eller flera bärfrekvenser. Dessutom kan de mäta [Dopplerförskjutningen](#) av satellitsignalen. Dopplermätning används vid navigering för att bestämma mottagarens hastighet. Inom geodetisk mätning används bara fas- och kodmätningar, varför endast dessa beskrivs i det följande.

10.4.1 Observationsekvation för kodmätning

Observationsekvationer relaterar mätningar med de parametrar som ska skattas (se formel 8.6), i vårt fall koordinater. Vi börjar med definitionen av pseudoavståndet, R :

$$R = c\Delta t \quad 9.2$$

där c är ljusets hastighet och Δt är mätsignalens gångtid. Δt kan också uttryckas som differensen mellan mottagningstiden t_M och sändningstiden t^S , så formel 9.2 kan även skrivas som:

$$R = c(t_M - t^S) \quad 9.3$$

Eftersom ingen klocka är helt synkroniserad med mastersklockan – som realiserar ”sann”, eller *systemtid* – så måste vi introducera *klockkorrektionerna*:

$$\begin{aligned} t_M(GPS) &= t_M - \delta_M \\ t^S(GPS) &= t^S - \delta^S \end{aligned} \quad 9.4$$

där (GPS) betecknar systemtid, δ_M är mottagarens klockkorrektion och δ^S är satellitens klockkorrektion. Med formel 9.4 kan formel 9.3 skrivas som:

$$R = \rho + c(\delta_M - \delta^S) \quad 9.5$$

ρ är geometriskt avstånd mellan mottagaren M och satelliten S:

$$\rho = c(t_M(GPS) - t^S(GPS)) = \sqrt{(X^S - X_M)^2 + (Y^S - Y_M)^2 + (Z^S - Z_M)^2} \quad 9.6$$

där X^S, Y^S, Z^S är satellitkoordinater och X_M, Y_M, Z_M är mottagarens sökta koordinater. Satellitkoordinaterna och satellitklockkorrektionen δ^S beräknas m.h.a. parametrar från navigeringsmeddelandet. Mottagarens klockkorrektion δ_M är en obekant som måste lösas tillsammans med mottagarens koordinater. Observationsekvationen 9.5 innehåller alltså fyra obekanta parametrar $(X_M, Y_M, Z_M, \delta_M)$ och därför behövs det minst fyra satelliter för positionsbestämning i 3D. Formel 9.5 gäller för alla GNSS och alla typer av avståndsmätningsskoder.

10.4.2 Observationsekvation för fasmätning

Fasmätning skiljer sig från kodmätning bara genom periodobekanta. Därför ersätter vi R med φ och adderar den obekanta N i formel 9.5:

$$\lambda\varphi = \Phi = \rho + c(\delta_M - \delta^S) + \lambda N \quad 9.7$$

Där λ är bär våglängd och Φ är fasmätningen uttryckt i meter. Notera att det borde vara minustecken vid termen λN om vi härleder ekvationen från Figur 10.5. Här följer vi dock en konvention från de flesta GNSS-böcker. Tecknet på termen λN har ingen betydelse för skattningen av koordinater; den påverkar bara tecknet på det skattade värdet på N .

Observationsekvationerna 9.5 och 9.7 tar inte hänsyn till felkällor; vi kommer att komplettera med dem i följande avsnitt.

10.5 Felkällor

GNSS-observationer påverkas av en rad faktorer – felkällor. De kan delas upp i tre grupper: satellitrelaterade fel, fel som uppstår under signalens passage från satellit till mottagare samt fel relaterade till mottagaren.

10.5.1 Satellitrelaterade felkällor

Ban- och klockparametrar är beräknade ur observationer som har en viss mätosäkerhet. Därmed är även beräknade satellitkoordinater och klockkorrektioner behäftade med en viss osäkerhet, som ligger på nivån 1–3 m för utsända banparametrar och på cm-nivå för precisa banddata. Dessa fel påverkar direkt mätosäkerheten vid enkelpunktbestämning, men elimineras till stor del vid relativ mätning. Det finns också signalfördröjningar orsakade av satellitens hårdvara, som har samma effekt som klockfel.

10.5.2 Atmosfärsrelaterade fel och flervägsfel

Signalen passerar genom atmosfären, som bromsar signalen och ändrar dess riktning. Dessutom kan signalen studsas från reflekterande ytor, såsom byggnader, vattenytor, blöt mark, eller satellitens skrov. Den sistnämnda effekten kallas för *flervägsfel* (eng. *multipath*). Teoretiskt kan de orsaka upp till 70 m stora fel vid C/A-kodmätning, 7 m vid P-kodmätning och 5 cm vid fasmätning. Effekten är svår att modellera eftersom den beror på den relativa positionen mellan de reflekterande ytorna och mottagaren. Den kan reduceras med lämplig antenndesign, m.h.a. speciella algoritmer för signalbearbetning i mottagaren eller genom att mäta längre tid på en punkt. I praktiken, orsakar flervägsfel positionsfel på nivån några meter vid navigering och på cm-nivå vid relativ mätning.

Vad gäller påverkan på GNSS-signalerna kan atmosfären delas in i två delar: en elektriskt aktiv *jonosfär* och en elektriskt neutral *troposfär*. Jonosfären sträcker sig från 50 till 1500 km över jordens yta, innehåller fria elektroner och är ett ”dispersivt” medium för GNSS-signaler. Det betyder att påverkan beror på frekvensen och därför kan elimineras genom att man kombinerar mätningar på två eller flera frekvenser. Jonosfären bromsar kodmätningar och accelererar fasmätningar, d.v.s. man mäter för långt med kod och för kort med fas. Jonosfärens påverkan beror på antalet fria elektroner (eng. total electron content) och kan vara så mycket som 20–30 m. Effekten kan reduceras med hjälp av modeller, kombinerad mätning på två eller flera frekvenser och m.h.a. relativ mätning. GPS använder Klobuchars jonosfäriska modell. Modellens parametrar uppdateras av kontrollsegmentet och skickas till användarna via navigeringsmeddelandet. Den används av enkelfrekvensmottagare och kan ta bort ca 50 % av effekten.

Troposfären är den undre delen av atmosfären (0–50 km). Den är icke-dispersiv för GNSS-signaler, d.v.s. den påverkar alla frekvenser likadant och därmed är det inte möjligt att eliminera den m.h.a. mätningar på två frekvenser. Troposfären kan modelleras m.h.a. två komponenter, en våt och en torr. Den våta komponenten (moln, vattenånga) är svårare att modellera och prediktera och den står för ca 10 % (0.2–0.5 m) av den totala troposfäreffekten. Den torra komponenten kan orsaka 2–12 m fel, men den kan modelleras med hög noggrannhet (cm-nivå). Det finns flera troposfäriska modeller, t.ex. Hopfield eller Saastamonien. Effekten beror på temperatur, tryck, satellitens höjd över horisonten samt mottagarens höjd över havet. Den troposfäriska effekten elimineras vid relativ mätning, men den kan också skattas ur statistiska observationer över längre tid, vilket också utnyttjas av meteorologer för kartläggning av troposfären.

Både jonosfären och troposfären böjer signalens bana, vilket orsakar att signalen färdas längre väg jämfört med färdvägen i vakuum. Denna effekt ligger på mm-nivå, därmed är den försumbar vid navigering och den elimineras vid relativ mätning.

10.5.3 Mottagarrelaterade fel

Den position som mottagaren bestämmer är egentligen positionen för GNSS-antennens *elektriska centrum*. Detta centrum är en virtuell punkt vars position relativt antennens geometriska centrum kan variera beroende på signalens infallsvinkel. Dessa variationer ligger på mm-nivå för avancerade (dyra) antenner och på cm-nivå för enklare antenner. Observationerna kan korrigeras för variationerna m.h.a. kalibreringstabeller levererade av antenntillverkare eller från kalibreringscentra, t.ex. [National Geodetic Survey](#).

De mest signifikanta felen relaterade till mottagarna är felen vid själva kod- och fasmätningen. Dessa fel är slumpmässiga med en standardavvikelse på ca 30 cm för kod- och ca 2 mm för fasmätning. De kan elimineras genom längre mätserier. Mottagarens klockfel (bristande synkronisering), liksom periodobekanta, betraktas inte som felkällor, eftersom de skattas tillsammans med koordinaterna.

I vissa böcker kan man även hitta *relativistiska effekter* bland felkällorna, fast denna effekt blir en felkälla bara om den inte tas med i beräkningarna. GNSS-observationerna påverkas av effekter som beskrivs i både den speciella och den generella relativitetsteorin. Den speciella teorin säger att klockor som rör sig med hög hastighet går långsammare och den generella teorin att klockor placerade i gravitationsfält med högre potential går långsammare. Den förstnämnda effekten orsakar en fördröjning av satellitklockorna med 7 μs /dag och den sistnämnda effekten att satellitklockorna ”fortar sig” 45 μs /dag. Så den totala relativistiska effekten är 38 μs /dag. Om man skulle bortse från dessa effekter, skulle positioneringsfelet växa med ca 10 km/dag. Största delen av den relativistiska effekten tas bort genom att sänka frekvensen på satellitklockorna: t.ex. för GPS, istället för 10,23 MHz genereras frekvensen 10,22999999543 MHz. En resterande, mindre del måste beräknas för den aktuella satellitpositionen.

10.5.4 Observationsekvationer med felkällor

Alla GNSS-observationer bör om möjligt korrigeras för ovannämnda effekter. Icke-korrigerade effekter påverkar noggrannheten i de beräknade koordinaterna negativt. Observationsekvationerna, med felkällorna inkluderade, kan skrivas som:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \rho + \lambda_1 N_1 + c(\delta_M - \delta^S) - I + T + O + MP_{11} + \varepsilon_{11} \\ \Phi_2 &= \rho + \lambda_2 N_2 + c(\delta_M - \delta^S) - \frac{f_1^2}{f_2^2} I + T + O + MP_{12} + \varepsilon_{12} \\ R_1 &= \rho + c(\delta_M - \delta^S) + I + T + O + MP_{21} + \varepsilon_{21} \\ R_2 &= \rho + c(\delta_M - \delta^S) + \frac{f_1^2}{f_2^2} I + T + O + MP_{22} + \varepsilon_{22}\end{aligned}\tag{9.8}$$

där index 1 och 2 betecknar bärvåg L1 och L2, f är frekvens, I och T är jonosfärisk resp. troposfärisk effekt, O är radiellt satellitpositionsfel, MP är flervägsfel och ε är slumpmässiga observationsfel.

10.6 Matematisk modell för positionsbestämning

10.6.1 Absolutpositionering

Mottagaren kan beräkna positionen, dvs. 3D-koordinater i WGS 84, så fort den har mätt

pseudoavstånd mot åtminstone fyra satelliter. I den enklaste modellen för enkelpunktspositionering löser man ett system av fyra eller fler kvadratiska ekvationer (9.5). Den vanligaste approachen är dock att man först linjäriserar ekvationerna m.h.a. Taylorutveckling och sedan tillämpar minsta-kvadratmetoden för linjära system, se avsnitt 9.5.3. Taylorutvecklingen sker runt approximativa koordinater (närmekoordinater). Mottagaren kan använda senast uppmätta koordinater som approximativa för nästa beräkning, eller också kan man beräkna approximativa koordinater genom att välja fyra satelliter och lösa fyra kvadratiska ekvationer med fyra obekanta. Efter Taylorutvecklingen kan formel 9.5 skrivas som:

$$R_M^S - \rho_{oM}^S + c \delta^S - I_M^S - T_M^S - \varepsilon = a_X^S dX + a_Y^S dY + a_Z^S dZ + c \delta_M \quad 9.9$$

där R_M^S är pseudoavståndet mätt av mottagaren M till satelliten S, ρ_{oM}^S är det geometriska avståndet beräknat m.h.a. mottagarens närmekoordinater X_{oM}, Y_{oM}, Z_{oM} och koefficienterna a är de partiella derivatorna av ρ_M^S (formel 9.6) med avseende på mottagarens koordinater, beräknat i punkten (X_{oM}, Y_{oM}, Z_{oM}) . Denna ekvation är linjär i de obekanta dX, dY, dZ , (tillskotten till de approximativa koordinaterna) och δ_M . Ekvationerna sammanställs i matrisform till ekvationssystemet:

$$\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v} = \mathbf{A} d\hat{\mathbf{x}} \quad 9.10$$

med minsta-kvadratlösningen (se formel 8.8):

$$d\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad 9.11$$

Vektorn $\boldsymbol{\lambda}$ innehåller vänsterledet i formel 9.9, varje rad i koefficientmatrisen \mathbf{A} innehåller tre kolumner med koefficienterna a samt en kolumn med 1:or och elementen i vektorn $d\hat{\mathbf{x}}$ är skattningarna av de obekanta parametrarna dX, dY, dZ och $c\delta_M$. Antalet rader i $\boldsymbol{\lambda}$ och \mathbf{A} är lika med antalet observationer.

Positioneringsosäkerheten beror inte bara på antalet mätningar utan också på satelliternas fördelning över himlen. Diagonalelementen i matrisen $\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ används för beräkning av de s.k. *DOP-talen* ($DOP = Dilution Of Precision$), som kvantifierar påverkan av satelliternas geometri på resultatets osäkerhet, jfr formlerna 8.10 och 8.11. De vanligaste DOP-talen är PDOP och GDOP (positions-DOP och geometrisk DOP). PDOP beskriver påverkan av geometrin på skattningskvaliteten i en 3D-position och GDOP på skattningskvaliteten i samtliga fyra obekanta:

$$\begin{aligned} PDOP &= \sqrt{Q_{XX} + Q_{YY} + Q_{ZZ}} \\ GDOP &= \sqrt{Q_{XX} + Q_{YY} + Q_{ZZ} + Q_{\delta\delta}} \end{aligned} \quad 9.12$$

DOP-talen har ingen enhet och generellt gäller att ju mindre de är desto bättre satellitgeometri och noggrannare resultat. Numeriskt är PDOP något mindre än GDOP och de är nästan till 100 % korrelerade. Så i praktiken spelar det ingen roll om man bedömer geometrin m.h.a PDOP eller GDOP. Normalt ligger värdena mellan 1 och 3; de blir större om mottagaren inte "ser" hela himlen, dvs. om tillgängliga satelliter ligger samlade på en mindre del av himlavalvet. Värden mindre än 7 betraktas som acceptabla. Det finns också andra DOP-tal definierade i litteraturen, som Horisontell-DOP, Vertikal-DOP eller Tid-DOP, men de används sällan i praktiken.

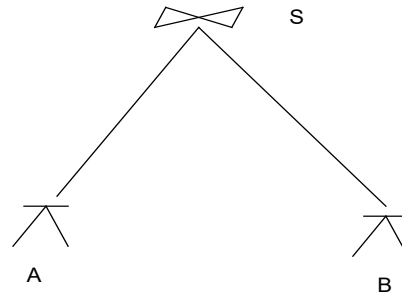
Om man har tillgång till observationer på bägge frekvenserna är det möjligt att forma en s.k. *jonosfärsfri kombination*, som betecknas med R_3 :

$$R_3 = \frac{R_1 f_1^2 - R_2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} = \rho + c(\delta_M - \delta^S) + T + O + MP_3 + \varepsilon_3 \quad 9.13$$

Denna formel kan härledas från de två sista ekvationerna i 9.8. Ekvationen kan lösas på samma sätt som formel 9.9. Observera att jonosfärens påverkan I är eliminerad, men flervägsfel och brus kombineras och är något större jämfört med de ursprungliga (icke kombinerade) observationerna.

10.6.2 Relativpositionering

Ett annat sätt att eliminera olika felkällor är att kombinera mätningar från två eller flera mottagare som mäter samtidigt mot samma satelliter – detta utnyttjas vid relativ mätning. De vanligaste kombinationerna är enkel- och dubbeldifferenser. *Enkeldifferens* är differensen mellan fas- eller kodobservationer utförda från två mottagare till en satellit – se Figur 10.6.



Figur 10.6. Enkeldifferens

Vi kommer att visa differenser bara på L1-fasmätningar; differenserna för andra observationer härleds precis på samma sätt. Observationsekvationerna för fasmätningarna i Figur 10.6, blir:

$$\begin{aligned} \Phi_A^S &= \rho_A^S + c(\delta_A - \delta^S) + \lambda_1 N_A^S + I_A^S + T_A^S + O_A^S + MP_A^S + \varepsilon_A^S \\ \Phi_B^S &= \rho_B^S + c(\delta_B - \delta^S) + \lambda_1 N_B^S + I_B^S + T_B^S + O_B^S + MP_B^S + \varepsilon_B^S \end{aligned} \quad 9.14$$

Nu formar vi differensen $\Phi_A^S - \Phi_B^S$:

$$\Phi_{AB}^S = \Phi_A^S - \Phi_B^S = \rho_{AB}^S + c\delta_{AB} + \lambda_1 N_{AB}^S + I_{AB}^S + T_{AB}^S + O_{AB}^S + MP_{AB}^S + \varepsilon_{AB}^S \quad 9.15$$

där index AB betyder differens mellan parametrarna för A och B, t.ex. $N_{AB}^S = N_A^S - N_B^S$.

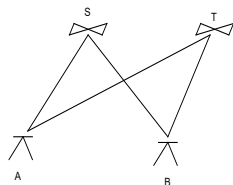
Notera att enkeldifferensen eliminerar satellitklockfelet δ^S . Den eliminerar också effekten av jonosfären, troposfären och satellitpositionsfelet för korta baslinjer, dvs. för korta avstånd mellan mottagarna A och B.

Formellt kan man skriva

$$I_{AB}^S \rightarrow 0; T_{AB}^S \rightarrow 0; O_{AB}^S \rightarrow 0 \text{ om avståndet } AB \rightarrow 0 \quad 9.16$$

I praktiken är dessa differenser aldrig lika med noll, men de är försumbara för korta baslinjer: I_{AB}^S och T_{AB}^S är försumbara för baslinjer kortare än ca 15 km och O_{AB}^S för baslinjer kortare än ca 100 km. Notera att flervägsfel och brus inte elimineras.

För att även eliminera mottagarnas klockfel bildar man *dubbeldifferenser*: differensen mellan två enkeldifferenser. Låt två mottagare A och B observera två satelliter S och T, se Figur 10.7.



Figur 10.7. Dubbeldifferens.

För korta baslinjer kan vi skriva enkeldifferenserna för satelliterna S och T som:

$$\begin{aligned}\Phi_{AB}^S &= \rho_{AB}^S + c\delta_{AB} + \lambda_1 N_{AB}^S + MP_{AB}^S + \varepsilon_{AB}^S \\ \Phi_{AB}^T &= \rho_{AB}^T + c\delta_{AB} + \lambda_1 N_{AB}^T + MP_{AB}^T + \varepsilon_{AB}^T\end{aligned}\quad 9.17$$

Dubbeldifferensen formas som differensen $\Phi_{AB}^{ST} = \Phi_{AB}^S - \Phi_{AB}^T$:

$$\Phi_{AB}^{ST} = \Phi_{AB}^S - \Phi_{AB}^T = \rho_{AB}^{ST} + \lambda_1 N_{AB}^{ST} + MP_{AB}^{ST} + \varepsilon_{AB}^{ST}\quad 9.18$$

Dubbeldifferenser är den vanligaste kombinationen av observationer vid bearbetning av relativa GNSS-mätningar. Notera att påverkan av flervägsfel och brus inte elimineras. Dubbeldifferenskvationer kan lösas m.h.a. minsta kvadratmetoden: efter linjearisering av formel 9.18 och motsvarande kodekvationer får man ett system av linjära ekvationer som kan skrivas i matrisform enligt formel 9.10. Den enda skillnaden är att vektorn λ och matrisen \mathbf{A} innehåller differenser av observationer respektive koefficienter och att vektorn med obekanta parametrar $d\hat{\mathbf{x}}$ innehåller periodobekanta N (en för varje dubbeldifferens) istället för klockfel δ_M .

Den lägsta mätosäkerheten uppnås med om man kan skatta periodobekanta (N_{AB}^{ST}) som heltal. Proceduren för heltalsbestämningen heter "lösning av periodobekanta" (eng. ambiguity fixing) och det finns flera metoder för detta. Alla metoder börjar med att man skattar periodobekanta som ett flyttal tillsammans med koordinaterna. Sedan identifieras möjliga heltalskandidater för varje periodobekant. I nästa steg testas alla möjliga kombinationer av kandidater och den korrekta kombinationen identifieras. I bästa fall räcker det med en epok (en epok = samtidigt utförda mätningar mot alla tillgängliga satelliter), men ibland måste man ackumulera mätningar under längre tid för att kunna identifiera de korrekta heltalen. Detta krävs om avståndet mellan mottagarna är längre (villkor 9.16 gäller ej) eller om observationerna är brusiga p.g.a. flervägsfel eller svag signal.

10.7 Sammanfattning

GNSS använder satelliter som "kända" punkter för positionsbestämning genom att mäta avståndet till satelliterna. Avståndet bestäms ur tidsmätning, varför man måste ta hänsyn till klockfelen. Man mäter gångtiden för satellitsignalen m.h.a. kodmätning (högre osäkerhet) och fasmätning (lägre osäkerhet). Minst fyra satelliter behövs för 3D positionsbestämning. Satellitgeometrin (antalet satelliter och deras fördelning över himlen) är en viktig faktor som påverkar positioneringsnoggrannheten. Den beskrivs av DOP-talen: ju lägre DOP-tal, desto lägre osäkerhet. Det finns en mängd andra faktorer (felkällor) som också påverkar osäkerheten vid GNSS-mätning: satellitrelaterade,

atmosfärsrelaterade och mottagarrelaterade fel. I princip finns det två metoder för eliminering av dessa fel: att använda felmodeller eller relativ mätning. Modeller används framför allt vid absolutpositionering, d.v.s. positionering m.h.a. en (1) GNSS-mottagare. Vid relativpositionering (samtidig mätning med minst två mottagare) elimineras felen genom att forma differenser mellan observationer utförda med olika mottagare. I praktiken använder man framför allt enkel- och dubbeldifferenser.

10.1 Ordlista

Banparametrar – parametrar som beskriver satellitens bana; m.h.a. dessa parametrar kan man beräkna satellitens koordinater för godtycklig epok (tidpunkt)

Bärfrekvens – frekvensen för de elektromagnetiska vågor som ”bär” någon information. T.ex. man måste ställa in radion på en viss frekvens (= bärfrekvens) för att kunna lyssna på en specifik radiostation.

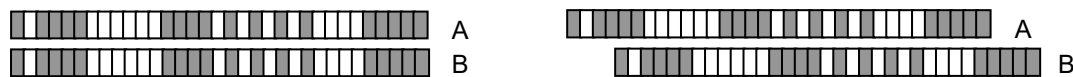
Dopplerförskjutning - förändring av frekvensen hos en signal beroende på om källan närmar sig eller avlägsnar sig i förhållande till observatören. Exempel: sirenen på en polisbil ändrar ton när den passerar förbi.

Ephemeris – bandata, d.v.s. banparametrar + ytterligare information. Skickas till användarna via satellitsignaler (= broadcast ephemeris) eller också kan man hämta mer precisa data efter måttillfället från internet (= precise ephemeris)

Fas - samtidighet hos två vågor eller andra periodiska förlopp. Exempel: Två barn gungar intill varandra på var sin gunga. Bara om de gungar i fas (fasskillnaden mellan gungorna = 0) kan de hålla varandra i handen. Vid GNSS-mätning utnyttjar man fasmätning för att uppnå cm- eller bättre mätosäkerhet. Mottagaren mäter fasskillnaden mellan mottagen och genererad signal.

Hydrogen-maser klocka – mycket noggrann typ av atomklocka som används bl.a. för tidshållning gentemot den internationella tidsskalan.

Korrelation – styrkan och riktningen av ett samband (likhet) mellan två variabler; här mellan två kodsekvenser. Figuren nedan visar stor (t.v.) och liten korrelation (t.h.)



Modulera – infoga data på bärfrekvens.

P-kod, C/A-kod – koder modulerade på GPS-signaler, används för att mäta avståndet mellan mottagare och satellit. P-koden är mer precis än C/A-koden.

Pseudoavstånd – ett avstånd bestämt genom att mäta gångtiden för en elektromagnetisk signal som utbreder sig från sändare till mottagare. Även ett litet fel i tidsmätningen ger upphov till stora fel i bestämt avstånd.

Satellitgeometri – satelliternas spridning över himlen, beskrivs av DOP-talen

Våglängd – avståndet mellan repeterande delar av ett vågmönster. Våglängden (λ) har en omvänd relation till frekvensen (f): $\lambda = c/f$, där c betecknar ljusets hastighet.

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021.

Lästips: Två standardböcker om GPS är Hoffmann m.fl. (2007) och Leick (2004)

11 GNSS-mätning

Idag används GNSS för många olika ändamål. Med *GNSS-mätning* menar vi:

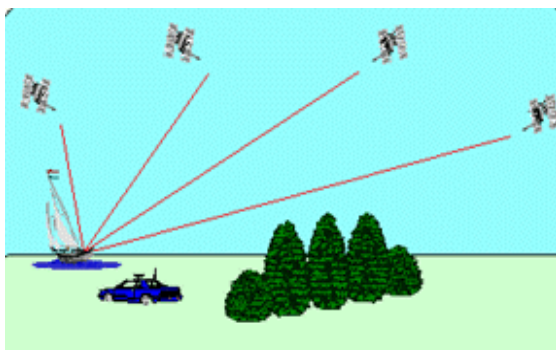
- Inmätning av olika objekt, t.ex. vid kartläggning eller insamling av data till geografiska databaser.
- Utsättning, t.ex. markering av tomtgränser eller maskinstyrning i byggprocessen.
- Noggrann positionsbestämning av enstaka, välmarkerade punkter, t.ex. stommätning, övervaknings- eller deformationsmätning.
- Banbestämning, t.ex. bestämning av position och orientering av flygburna karteringssensorer (kamera, laserskanner etc.).

Det finns olika sätt att utföra GNSS-mätning. Man kan dela in sätten beroende på

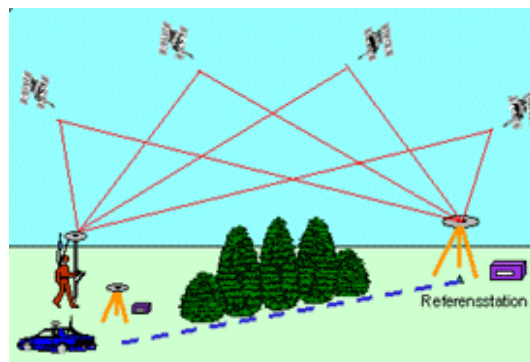
- 1) hur många mottagare som används:
 - a. *absolutmätning* – observationer från **en** mottagare används (se Figur 11.1); positionen är bestämd m.h.a. satelliternas (absoluta) koordinater. Eventuellt fel i satelliternas koordinater påverkar direkt mottagarens position. Absolutmätning kallas också *enkelpunktbestämning* (eng. single point positioning).
 - b. *relativmätning* – observationer från två eller flera GNSS-mottagare är involverade (se Figur 11.2), varav åtminstone en mottagare (s.k. referensmottagare) är placerad på en känd punkt. Positioneringsnoggrannheten är ganska okänslig för fel i satelliternas koordinater.
- 2) om mottagarna står stilla eller rör sig under mätningen:
 - a. *statisk mätning* – mottagaren står still och utför mätningar under längre tid på en och samma punkt
 - b. *kinematisk mätning* – mottagaren bestämmer sin position under rörelse
- 3) bearbetningstillfället:
 - a. *realtid* – mottagarens position beräknas direkt efter mättillfället
 - b. *efterbearbetning* – mottagaren samlar observationer (kod, fas) under mätning, positionen beräknas i efterhand
- 4) vilka GPS-observationer som används (jfr kapitel 10):
 - a. *kodmätning* – endast kodobservationer används
 - b. *fasmätning* – både fas- och kodobservationer används.
- 5) vilka bärfrekvenser används vid mätning
 - a. *enkelfrekvensmätning* – mätningarna (kod- och fas-) utförs bara på L1-frekvensen
 - b. *tvåfrekvensmätning* – mätningarna utförs både på L1 och L2-frekvenserna
 - c. *trefrekvensmätning* – mätningarna utförs på L1, L2 och L5-frekvenserna.

Kapitel 11: GNSS-mätning

Notera att denna indelning inte listar alla mätmetoder, utan varje mätmetod kan beskrivas m.h.a. en kombination av punkter från listan ovan. T.ex. för tillämpningar med de högsta noggrannhetskraven används statistisk relativmätning där mottagarna utför kod- och fasmätningar på alla tillgängliga frekvenser och bearbetning sker efter mättillfället. I detta kapitel presenteras de vanligaste mätmetoderna för GNSS, se jämförelse i *Tabell 11.1*.



Figur 11.1. Absolutmätning. Källa: Lantmäteriet.



Figur 11.2. Relativmätning. Källa: Lantmäteriet.

Tabell 11.1. Mätosäkerhet för de vanligaste GNSS-mätmetoderna, 95% täckningsgrad.

Metod	Mottagare	Observationstid	Horisontell osäkerhet (95%) [m]	Vertikal osäkerhet (95%) [m]
Absolut	C/A-kod, L1	1 s	19	39
Absolut	P-kod, L1 & L2	1 s	3	6
PPP	Fas+kod, L1 & L2	>1 timme	0.05	0.10
DGPS (relativ)	C/A-kod, L1	1 s	1	2
RTK (relativ)	Fas+kod, L1 & L2	1 s	0.03	0.05
Statisk, relativ	Fas+kod, L1 & L2	>1 timme	< 0.01	<0.02

11.1 Absolutmätning

Absolutmätning m.h.a. en kodavståndsmätning på en frekvens är den vanligaste metoden och den används framför allt vid navigering. Alla typer av mottagare klarar av denna metod. Beroende på typ av mottagare (vilka typer av observationer som görs) ligger positioneringsosäkerheten på nivån några meter till några tiotals meter. En stor fördel är att metoden är snabb, enkel och kan utföras med de enklaste (billigaste) mottagarna. Jämfört med fasmätning behöver inte några periodobekanta bestämmas, vilket gör att den inte är känslig för signalavbrott. Anledningen till att noggrannheten inte är bättre är att de inverkande felkällorna påverkar resultatet fullt ut. Osäkerheten kan minskas genom statistisk mätning.

Statisk mätning innebär att mottagaren står still och utför mätningar under längre tid på en och samma punkt. Långa statistiska observationer möjliggör eliminering av

Kapitel 11: GNSS-mätning

GNSS-mätning

slumpmässiga fel, samt periodiska (flervägsfel) och atmosfäriska fel. Om man använder tvåfrekvensmottagare, som också kan utföra fasmätning, kan man uppnå en mätosäkerhet på cm-nivå vid efterbearbetning och användning av precisa banddata. Denna typ av mätning och efterbearbetning betecknas i litteraturen som PPP (Precise Point Positioning).

11.2 Statisk relativmätning

Statisk relativmätning ger ett resultat med minsta möjliga mätosäkerhet. Sådana mätningar utförs med två eller flera GNSS-mottagare, som samlar kod- och fasobservationer mot alla tillgängliga satelliter. Vid beräkningen formas enkel- och dubbeldifferenser och därför är det viktigt att alla mottagare mäter samtidigt mot samma satelliter. En sådan mätserie kallas för *session* och en vektor mellan två stationer benämns *baslinje*.

Relativmätning är omöjlig om olika mottagare mäter mot olika satelliter, vilket kan hända om mottagarna befinner sig på motsatta sidor av jorden, eller om två mottagare befinner sig på varsin sida av en hög byggnad, så att varje mottagare bara ser sin egen halva av himlen. Därför är det ibland viktigt att planera statistiska mätningar i förväg. För planeringen används planeringsprogramvara, vilken kan beräkna positioner för alla GNSS-satelliter för olika givna tidpunkter och platser. Därigenom kan man prediktera geometrin (DOP-talen) och hur många satelliter som kommer att bli synliga. Programvaran kan även ta hänsyn till hinder runt stationerna. Planering är särskilt viktig vid mätning i bebyggda eller skogklädda områden. Dagens satellitantal garanterar bra geometri dygnet runt om det inte finns några hinder nära stationen.

Som namnet ”relativ” säger, får man bara *relativa positioner*, dvs. vektorer **mellan** stationerna. Om man vill beräkna *absoluta positioner* – punkternas koordinater i ett visst referenssystem, t.ex. SWEREF 99 – måste åtminstone en mottagare placeras på en punkt med kända koordinater i detta system. I Sverige, liksom i de flesta industriländer, finns det ett nät av *permanenta referensstationer* för GNSS. Därför behöver användarna inte ställa upp en egen mottagare som referens, utan kan hämta data från närmaste permanenta station(er). Det svenska nätet SWEPOS drivs av Lantmäteriet och består av ca 500 stationer spridda över landet, se Figur 11.3. För detaljer och aktuell status se Lantmäteriets [SWEPOS-webbsida](#).

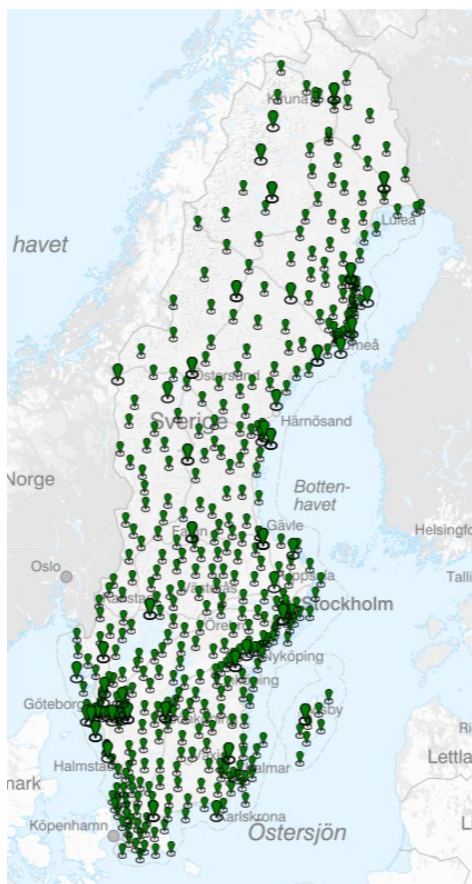
Den observationstid som krävs för ett pålitligt resultat beror på avstånden mellan mottagarna, antalet satelliter, signalstyrka och signalavbrott, atmosfärens tillstånd, typ av observationer (en eller flera frekvenser) samt vilka bearbetningsalgoritmer som används. Som redan nämnts, finns det olika algoritmer för fixering av periodobekanta. Vissa algoritmer hittar heltallslösning med mindre data och vissa tillverkare marknadsför snabba algoritmer under namnet ”rapid static” eller ”fast static”.

Hoffman-Wellenhof et al. (2007) rekommenderar följande observationstider för snabba algoritmer: 20 minuter + 2 min/km för enfrekvensfasmätning och 10 minuter + 1 min/km för flerfrekvensfasmätning. Addera 10 minuter för konventionella (äldre) algoritmer. Alla dessa tider är bara fingervisningar och kan inte garantera bra resultat i alla situationer. Därför är rekommendationen att mäta lite längre för att säkerställa rätt heltallslösning av periodobekanta. Det är mer kostsamt att repetera mätningen om det visar sig att det inte går att uppnå ett bra resultat.

Vid relativmätning sparas alla mätningar i mottagaren (eller tillhörande kontrollenhet) och överförs sedan till en dator för bearbetning (*efterberäkning*). Data sparas vanligtvis

Kapitel 11: GNSS-mätning

i tillverkarens eget format och innehåller både GNSS-observationer och navigeringsmeddelanden. Det betyder att användarna får alla nödvändiga data för koordinatberäkningar från mottagaren. Det finns många GNSS-bearbetningsprogramvaror på marknaden; de flesta tillverkare av geodetiska GNSS-mottagare har utvecklat sina egna. Det är inte alltid möjligt att läsa in data från andra mottagarfabrikat. Vill man blanda olika märken i en mätning, måste data konverteras till standardformatet RINEX (Receiver INdependent EXchange Format), som kan läsas in av nästan alla GNSS-programvaror.



Figur 11.3. Sweposstationer. Källa Lantmäteriet

11.3 Kinematisk relativmätning

Kinematisk relativmätning är en efterberäkningsmetod, där man bearbetar data från en eller flera referensmottagare och en eller flera rörliga mottagare. Vid *kinematisk mätning* bestämmer mottagaren sin position under rörelse. En variant av kinematisk mätning är *”stop-and-go”-mätning*, där mottagaren stannar bara någon sekund på varje punkt som ska positionsbestämmas.

För att uppnå en osäkerhet på cm-nivå måste kinematisk mätning initialiseras, dvs. periodobekanta måste fixeras till heltal. Det finns olika metoder för initialisering av kinematiska mätningar. Den vanligaste metoden är s.k. OTF (on-the-fly), vilken innebär att mottagaren får röra sig under hela mätperioden. Programvaran använder alla data för skattning av periodobekanta. För korrekt initialisering behövs vanligtvis några sekunders till några minuters oavbrutna mätningar. En annan metod är statisk initialisering, där mottagaren står stilla på en godtycklig eller på en känd punkt. Som en känd punkt kan t.ex. senast inmätta punkt utnyttjas. Initialisering på en känd punkt ger kortast initialiseringstid, vanligtvis några sekunder.

11.4 Differentiella metoder

Principen och den matematiska modellen för relativ och *differentiell positionering* är desamma: en mottagare placeras på en känd punkt (referensmottagare) och den andra mottagaren (rörlig mottagare) besöker de punkter som ska positionsbestämmas. Vid databearbetningen kombineras data från båda mottagarna. Detta är det enklaste scenariot med bara två mottagare. Det är möjligt att förbättra noggrannheten och effektiviteten genom att använda flera referensmottagare och/eller flera rörliga mottagare. Skillnaden mellan relativ och differentiell mätning är bara bearbetnings-tillfället: relativmätning är en efterberäkningsmetod medan differentiell mätning är en realtidsmetod, dvs. koordinaterna beräknas direkt efter varje mätepok. Vid differentiell mätning överförs data från referensmottagarna till de rörliga via en kommunikationslänk, t.ex. GSM, radio eller internet.

Referensstationerna kan skicka s.k. differentiella korrektioner eller råa observationer, dvs. fas- och/eller kodobservationer. Differentiella korrektioner är differenser mellan observerat och beräknat geometrisk avstånd mellan antenn och satellit, som kan beräknas ur kända koordinater för referensstationen. Man kan beräkna enkeldifferenser genom att addera korrektionerna till observationer utförda på rörliga mottagare. Differentiella metoder kan utnyttja antingen bara kodobservationer (DGNSS-metoden), eller både kod- och fasobservationer (RTK-metoden). Användare kan ställa upp sin egen referensmottagare eller använda s.k. differentiella tjänster.

I Sverige finns både DGNSS- och RTK-tjänster att tillgå. De är baserade på SWEPOS-nätet och det är Lantmäteriet som tillhandahåller dessa tjänster. Det finns ytterligare en svensk DGPS-tjänst (bara GPS L1 C/A-kod används), som är tillgänglig nära kustområden. Denna tjänst tillhandahålls av Sjöfartsverket för navigering till sjöss och är gratis för alla användare.

Med DGNSS-tjänster erhålls mindre osäkerhet för kodmätning i realtid, samtidigt som man har kodmätningens fördelar: enkelhet, snabbhet och okänslighet för signalavbrott. DGNSS mätosäkerhet begränsas av att den bara använder kodobservationer på en frekvens. Detta medför att det är svårt att uppnå positionsnoggrannheter bättre än ca 1 m. För att få ett avsevärt förbättrat resultat måste fasobservationer utnyttjas (RTK-metoden), vilket möjliggör osäkerheter nedåt 1 cm.

RTK-mätning bygger på samma princip som kinematisk relativmätning (avsnitt 11.3). Den enda skillnaden är att beräkning sker direkt i fält., dvs. RTK-metoden är en realtidsmetod. Liksom kinematisk relativmätning, måste RTK-mätningen initialiseras för att uppnå en mätosäkerhet på cm-nivå. Fördelen med RTK-metoden jämfört med den kinematiska relativmetoden är att man ser direkt i fält om initialiseringen lyckades och man ser också den aktuella mätosäkerheten. RTK-metoden (till skillnad från kinematisk relativmätning) kan också användas för utsättning.

Den enklaste RTK-varianten använder bara en referensstation, som skickar RTK-korrektioner till en eller flera rörliga mottagare via en radiolänk. Detta är en ganska enkel och billig lösning, men nackdelen är den begränsade räckvidden för radiolänken (några km, beroende på terräng) och behovet av att äga/hantera en referensmottagare. Dessutom är elimineringen av de atmosfäriska felen tillräckligt bra bara för kortare avstånd (< 15 km) mellan referensen och den rörliga enheten, rovern.

Den andra varianten – s.k. nätverks-RTK (NRTK) – använder två eller flera referensmottagare, vilket möjliggör bättre modellering/eliminering av atmosfäriska fel. Därför kan metoden bibehålla samma noggrannhet som enkelstations-RTK även med

Kapitel 11: GNSS-mätning

avstånd på 60–70 km mellan referensstationerna. Denna variant kräver dock en extra dator med programvara som bearbetar data från alla referensstationer i realtid och sedan genererar korrektionerna åt användarna. Detta är normalt en alltför komplicerad lösning för enskilda användare.

Leverantörer av RTK-tjänster använder vanligtvis nätverks-RTK-metoden. Lantmäteriet tillhandahåller en sådan tjänst i Sverige. RTK-korrektionerna distribueras via GSM-modem och tjänsten täcker hela landet med undantag för de områden som inte täcks av GSM.

-----*****-----

Status: Kapitlet reviderades 2021.

Lästips: Två standardböcker om GPS är Hoffmann m.fl. (2007) och Leick (2004). Beträffande nätverks-RTK rekommenderas Norin m.fl. (2006) för nybörjaren och Odolinski (2010) för den mer rutinerade mätaren.

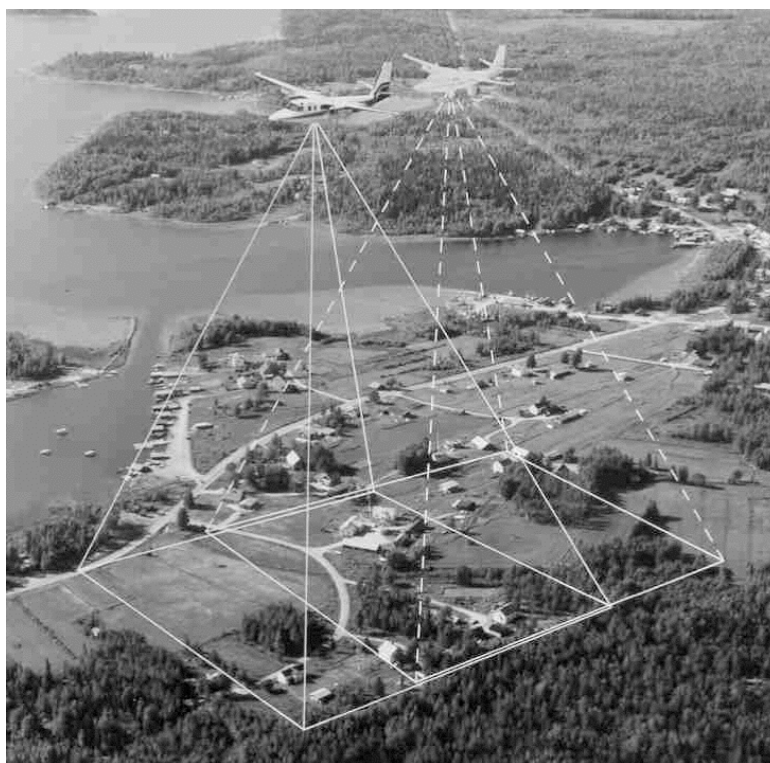
12 Fotogrammetri och flygbilder

12.1 Begreppet fotogrammetri

Ordet fotogrammetri betyder språkligt sett "mätning i fotografisk bild" och kan översättas med bildmätning. Internationella sällskapet för fotogrammetri och fjärranalys (ISPRS) beslutade vid kongressen i Wien 1996 om följande definition av fotogrammetri och fjärranalys: (Ämnesområdena anses så närliggande varandra, att man inte vill skilja dem.)

Fotogrammetri och fjärranalys är konsten, vetenskapen och tekniken att framställa tillförlitlig information ur icke berörande, avbildande och andra, sensorsystem, om jorden och dess miljö, och om andra fysiska objekt och processer, genom anskaffning, mätning, analys och representation av data.

Med hjälp av fotogrammetri kan man bestämma storlek, form och läge hos avbildade objekt genom mätning i bilder. Såväl bilder som tillämpningar kan ha olika karaktär. Fotogrammetrisk mätning kan utföras i enkelbild, i bildpar eller i förband (block) av många bilder. Bilderna föreligger i dag så gott som uteslutande i digital form.



Figur 12.1. Stereoskopisk flygfotografering för fotogrammetrisk kartframställning

Fotogrammetrisk mätning utförs i stereoskopiskt visade bildpar på en datorskärm eller med automatisk digital bildmatchning i förband av bilder. Bilderna visar objektet från olika riktningar. Ur mätningarna beräknas tredimensionella lägeskoordinater för punkter på ytan av det avbildade objektet. Dessa koordinater utgör tillsammans en numerisk **modell** av objektet.

För manuell mätning utnyttjas en operatörs stereoseende. Objektens lägen i bilderna mäts som tvådimensionella *bildkoordinater* x' , y' i ena bilden, x'' , y'' i den andra. Den numeriska modellen av objektet skapas genom att ljusstrålarna vid fotograferingen

rekonstrueras analytiskt (matematiskt) som vektorer. Tredimensionella *modellkoordinater* x , y , z beräknas för vektorernas skärningspunkter, som tillsammans skapar objektets yta, modellen.

Automatisk bildmätning med digital bildmatchning är en datorbaserad process för mönsterigenkänning, som efterliknar stereoseendet. För bildmatchning utnyttjas ofta ett förband (block) av många bilder av objektet.



Figur 12.2. En flygbild över Malmö registrerad med digital flygmätkamera Vexcel Xp. Originalformat 104 x 69 mm. (Bild Blom Sweden AB. Godkänd för spridning)

För fotogrammetri erfordras en kraftfull dator med stor minneskapacitet, effektiv mjukvara och god skärmpresentation.

Den klassiska tillämpningen av fotogrammetri är framställning av digitala kartdatabaser, lämpade för geografisk informationsteknik. Vi talar då om flygfotogrammetri. Flygfotografering för kartframställning utförs utefter raka flygstråk (fotostråk). Bilderna exponeras så, att de delvis överlappar varandra. Områden av större bredd täcks med flera parallella stråk. Dessa bildar tillsammans ett block av bilder. Bilderna utvärderas parvis eller flera samtidigt, med stereoskopisk mätning eller bildmatchning.

Produkter som framställs är kartor, dels storskaliga (ca 1:1000) primärkartverk, som utgör underlag för kommunal detaljplanering och infrastrukturplanering, dels småskaliga (1:5000 – 1:100 000) allmänna kartor och orienteringskartor. Andra produkter är digitala höjdmodeller, kartmässiga s.k. ortofoton och animationer. Dessa finner användning inom projektering och som del i geografiska informationssystem.

Digitala bilder i mindre format, tagna med handhållna eller fordons- eller stativburna

kameror, är vanliga vid tillämpningar inom t.ex. arkitektur och kulturvård, för visualisering av urbana miljöer eller inom bilindustrin. Då talar vi om markfotogrammetri (terrester fotogrammetri) för icke-topografiska tillämpningar. När satellitbilder utnyttjas för fotogrammetrisk mätning talar man om satellitfotogrammetri.

Rekonstruktion av tredimensionella stadsmodeller är ett exempel på gemensamt utnyttjande av flyg- och markbilder, liksom de internetbaserade presentationerna av flyg- och gatubilder som vägleder oss i sökande efter adresser.

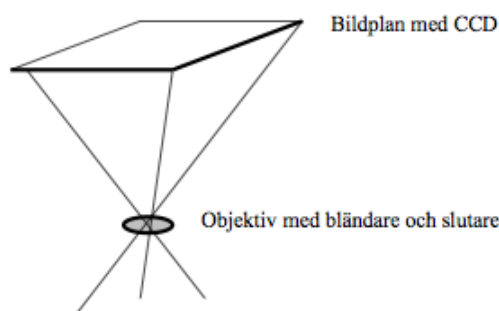
Forskningen inom fotogrammetri behandlar automatisering av fotogrammetriska mätningmoment med utnyttjande av digital bildbehandling, rekonstruktion av två- och tredimensionella strukturer i bilder, t.ex. vägar och byggnader i flyg- och satellitbilder, samt integrerade navigations- och sensorsystem för rörliga kamerabärare och samutnyttjande av laserskanning och bilder. Även analys och prediktion av kvalitet i bilder, data, metoder och resultat är av central betydelse. Forskning och utveckling bedrivs vid högskolor och myndigheter, inte minst Lantmäteriet, och av konsulter och industri-företag. Kartografiska Sällskapet (KS) är ett facksällskap med ändamål bl.a. att främja forskning och utveckling även inom fotogrammetriområdet. Man ger ut en tidskrift (Kart- och Bildteknik), delar ut resestipendier och medverkar i arrangemang av årliga Kartdagar. Internationellt är sällskapet anslutet bl.a. till ISPRS (se inledningen ovan), som organiserar internationella arbetsgrupper, symposier och kongresser. På motsvarande vis främjar Svenska Sällskapet för Automatiserad Bildanalys (SSBA) utvecklingen av digital bildanalys för olika, främst icke-topografiska tillämpningar. Sådan bildanalys utvecklas vid flera universitet och högskolor, bl.a. KTH, Uppsala, Linköping och Lund.

12.2 Digitala kameror och bilder

12.2.1 Kameran

En bild skapas genom att ljusstrålar från ett motiv projiceras genom en kameras objektiv till ett bildplan, där de registreras av en digital bildsensor (tidigare av en ljuskänslig emulsion i en fotografisk film).

Kamerans funktioner är att projicera en skarp optisk bild av det man vill avbilda på ett bildplan, att avpassa belysningen på bildplanet till bildsensorns känslighet och att utlösa exponeringen vid vald tidpunkt (Figur 12.3). Objektivets linser projicerar strålkärvar från varje del av det avbildade objektet till skarpa bildpunkter på bildplanet. Objektivöppningens storlek kan anpassas till rådande ljusförhållanden med en bländare, och exponeringen utlöses med en slutare, som öppnar objektivet en vald, ofta mycket kort tidrymd.

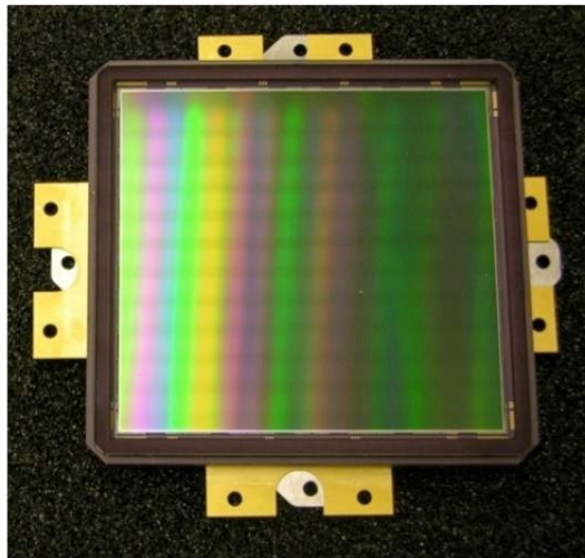


Figur 12.3. Principen för en kamera

Den digitala bildsensorn ger en digital bild i form av ett tätt nät av bildpunkter, en bild-matris. Den digitala bilden kan överföras till en dator, lagras i ett bildminne, bearbetas, visas på bildskärm och – om man så vill – skrivas ut på papper.

CCD-sensorn (Figur 12.4. CCD-sensor i form av detektormatris med format 90 x 84 mm för flygmätkameran Z/I DMC II. Matrisen rymmer 250 miljoner detektorelement.) består av en rad eller matris av tätt liggande ljuskänsliga element (detektorer) på en tunn kiselskiva. De elektriska signalerna (laddningarna) från dessa läses ut i sekvens, förstärks och lagras, därav namnet (Charge-Coupled Device eller Detectors). En enskild detektorrad av söker (skannar) objektet eller originalbilden radvis och skapar bilden successivt, medan en detektormatris registrerar en hel bild simultant. Sensorer i form av detektorrader är vanliga för satellitfjärranalys men förekommer även i flygkameror.

Digitala flygkameror har CCD-matriser (eller rader) med mycket höga prestanda vad avser detaljupplösning, kontraståtergivning, bildformat och geometrisk noggrannhet.



Figur 12.4. CCD-sensor i form av detektormatris med format 90 x 84 mm för flygmätkameran Z/I DMC II. Matrisen rymmer 250 miljoner detektorelement.

Ett detektorelement (som skapar ett bildelement, en pixel) är normalt ca 5x5 till 50x50 μm stort. En till formatet större CCD-sensor medger, att de enskilda detektorerna görs större. De ger därigenom ett högre signal/brus-förhållande, dvs. bättre bildkontrast och lägre brus. Digitalkameror i handeln kan erhållas med CCD-format från ca 6x9 mm till småbilsformatet 24x36 mm. Digitala bakstycken till mellanformatskameror kan ha format ca 4x6 cm och digitala flygmätkameror upp till 9x9 cm – om de nu inte består av flera mindre kameror, vars bilder räknas ihop till större format, eller är konstruerade som kontinuerliga CCD-skannrar med detektorrader.

Digitala bilder i färg erhålls normalt genom registrering med en CCD, vars detektorelement filtrerats för de tre grundfärgerna blått (B), grönt (G) och rött (R) och placerats blandade med varandra. Större flygkameror består däremot av flera parallella kameror, filtrerade var och en för en av de tre grundfärgerna och för infrarött (IR), förutom en pankromatisk (svart-vit) huvudkamera. (Med pankromatisk menas känslig för alla färger.) Svartvita bilder (SV Pan), färgbilder (F) och IR-färgbilder (IRF) skapas genom sambearbetning av olika kombinationer av dessa bilder. Svartvita pankromatiska bilder och färgbilder karakteriseras av en spektral känslighet, som omfattar samma våglängdsområde som ögats. Avsikten är, att de återgivna gråtonerna

resp. färgerna ska upplevas naturliga. IR-färgbilderna däremot är främst anpassade för att tydligt återge levande vegetation, vattenföroreningar, markfuktighet m.m.

12.2.2 Den digitala bilden

En digitalt lagrad bild (en digital bild) består av en matris av bildelement (pixel, av engelskans picture element, se Figur 12.5). Varje bildelement utgörs av ett digitalt gråvärde, ett numeriskt värde på den registrerade strålningsintensiteten i elementet. Gråvärdet lagras i minst 256 nivåer, dvs. som 8 eller fler (upp till 14) bitars digital information. Den radiometriska upplösningen (gråvärdesupplösningen) i varje enskilt CCD-element är därför hög. Elementets läge återfinns med hjälp av sitt rad- och kolumnvärde (r, k) i bildmatrisen.



Figur 12.5. En digital bild och dess uppbyggnad av bildelement (pixlar).

Digitalkamerors upplösning brukar anges som CCD-sensors totala antal bildelement. En megapixel (MP) utgör 10^6 bildelement. Som jämförelse kan anges, att för att kunna förstora en digital bild till A4-format med god kvalitet fordras att originalbilden består av ca 4 MP.

En flygbilds upplösning kan anges som dess pixelstorlek, i μm eller förstora med bildskalfaktorn ("0,1 m markupplösning"). Måttet kan dock vara vilseledande och måste användas med försiktighet. Ett annat vanligt mått på bildupplösning är ppi ("pixels per inch"). Omräkning mellan ppi och pixelstorlek ($\mu\text{m}/\text{px}$) kan göras med formeln

$$25\,000 / \text{ppi} = \mu\text{m}/\text{px}$$

Exempelvis motsvaras 1000 ppi av 25 $\mu\text{m}/\text{px}$, eller 10 $\mu\text{m}/\text{px}$ av 2500 ppi. (Motsvarande mått inom grafisk teknik är dpi, "dots per inch".)

Digital lagring av bilder kräver stort datorutrymme, om bilden avses få hög geometrisk och radiometrisk upplösning (detalj- och gråtonsupplösning). För att bilden ska få en detaljupplösning som motsvarar en högklassig optiks upplösning förmåga om ca 90 linjepar/mm, måste ett linjepar *sampling* (registreras) av mer än två bildpunktsrader. Pixelstorleken blir då mindre än 1/180 mm eller 5-6 μm . En flygkamera med bildformat 9x8 cm måste därför överföras till mer än $(90 \times 80 \times 1802) = 230$ miljoner bildelement, 230 megapixel (MP).

För att få tillräcklig gråtonsupplösning *kvantiseras* (digitaliseras) bilden i minst 256 grånivåer, dvs. som 8 bitars (en byte) digital information. För att erhålla god kontrast såväl i motivets skuggpartier som i dess högdagrar erfordras kvantisering i ännu fler nivåer, och det förekommer upp till 14 bitars kvantisering i flygmätkameror. Till detta

kommer registrering i flera våglängdsområden för att kunna återskapa färg- och IR-färgbilder.

En flygbild erfordrar därför över 0,5 gigabyte (GB) datorminne. Om metoder för datakomprimering utnyttjas, minskas lagringsbehovet, men risken för försämrad bildkvalitet vid dekomprimering måste då beaktas. Ett års flygfotoproduktion i Sverige kan omfatta upp till 20 000 bilder...

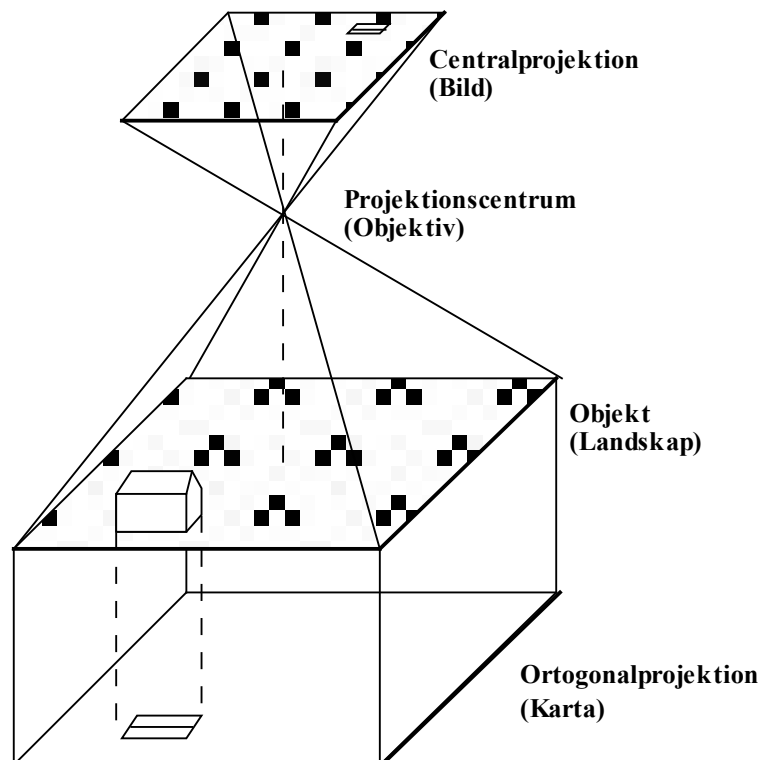
12.2.3 Bildskanning

För skanning av äldre fotografiska bilder och kartor används en bildskanner, normalt en planskanner (eng. flatbed scanner), som mekaniskt fungerar (och ser ut) ungefär som en vanlig kopiator med en detektorrad. För fotogrammetriskt bruk finns sådana utvecklade med mycket hög geometrisk kvalitet, men även enklare skannrar för grafiska ändamål (s.k. desktop publishing) kan användas efter geometrisk kalibrering. Det innebär särskilda kvalitetsproblem att anpassa digitalisering av en fotografisk bild till originalbildens egenskaper.

12.3 Enkelbildens geometri

12.3.1 Centralprojektion och bildskala

Eftersom fotogrammetri innebär mätningar i bilder och omräkning till mått i det avbildade objektet, så måste avbildningens geometri och därmed kamerans geometriska egenskaper kunna beskrivas. Avbildningsgeometrin i en kamera betecknas *centralprojektion* (Figur 12.6). Den karakteriseras av, att alla ljusstrålar skär varandra i en punkt i objektivet innan de projiceras på bildplanet. Skärningspunkten betecknas projektionscentrum. Centralprojektionens geometri kan beskrivas matematiskt. Dess egenskaper är av stor betydelse för fotogrammetrin.



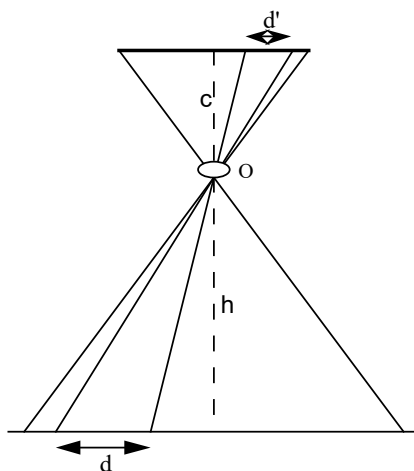
Figur 12.6. Central- och ortogonalprojektion

Kapitel 12: Fotogrammetri och flygbilder

Centralprojektion kan jämföras med kartans projektion. En karta är en *ortogonal* projektion av landskapet till ett projektionsplan i vald skala, se figur 13.6. Projektionsplanet är ett utsnitt ur den valda kartprojektionen. (Om kartprojektioner, se kapitel 3.) Varje terrängdetaljs läge projiceras vinkelrätt mot detta projektionsplan. Alla tänkta projektionsstrålar är sålunda parallella. (En sådan projektion skulle teoretiskt uppnås i bilden, om den centralprojicerande kameran befann sig oändligt långt bort.) En huvuduppgift för fotogrammetrin är att omvandla avbildningens centralprojektion till en kartmässig ortogonal projektion.

Fotograferingsriktningen definieras av *kameraaxeln* (streckad i figur 13.6), dvs. den stråle (vektor) genom projektionscentrum, vilken träffar bildplanet under rät vinkel. I flygfotosammanhang talar man om *lobbild*, då kameraaxeln är (nära) lodrät, och om *sträng lodbild*, då den är absolut lodrät. En sträng lodbild över plan och horisontell terräng (eller över ett annat plant och horisontellt objekt) är geometriskt identisk med en ortogonalprojektion av terrängen. Det enda som geometriskt skiljer objekt och bild åt är då *bildskalan*. Med bildskala menar man relationen mellan mått i bilden (d') och i objektet (landskapet, d). Se Figur 12.7. Bildskalan uttrycks som $1:m$, där m är skalfaktorn ("förstoringsfaktorn") från bild till verklighet:

$$1 : m = 1 : \left(\frac{d}{d'}\right)$$
$$m = \left(\frac{d}{d'}\right)$$



Figur 12.7. Sträng lodbild över plan terräng. Sträckan d avbildas som d' . O är projektionscentrum, h är flyghöjden och c är kamerakonstanten. Den streckade linjen betecknar kameraaxeln.

Observera alltså, att i en sträng lodbild över plan terräng är bildskalan konstant över hela bildytan. Approximativt gäller detta även för icke stränga lodbilder över måttligt kuperad terräng (se nedan).

Avståndet från projektionscentrum O till bildplanet kallas *kamerakonstanten* c . Ur likformiga trianglar i figur 13.7 framgår, att bildskalan kan uttryckas som förhållandet mellan kamerakonstant (c) och flyghöjd (h) över mark:

$$1 : m = 1 : \left(\frac{h}{c}\right)$$

dvs. skalfaktorn (m) kan också beräknas som

$$m = \frac{h}{c}$$

Detta är ett mycket användbart uttryck, främst för ungefärlig skalbestämning av flygbilder eller för beräkning av ungefärlig flyghöjd, om bildskalan är känd:

$$h = mc$$

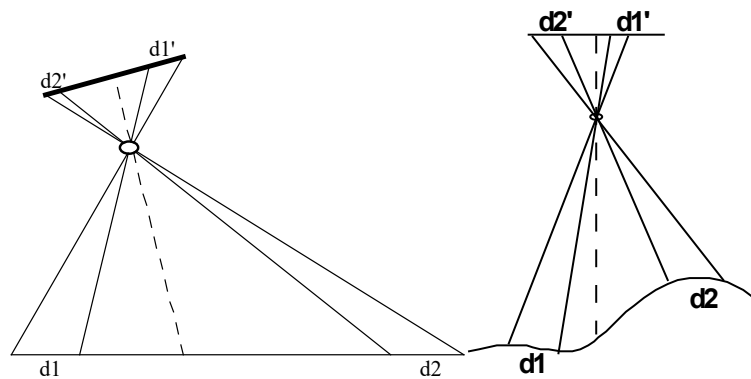
En centralprojektion av ett landskap blir således likformig med en ortogonalprojektion endast om fotograferingsriktningen är strängt lodrät, dvs. bildplanet är parallellt med landskapets plan, och om landskapet är plant och horisontellt. I verkligheten hanterar fotogrammetrin normalt lodbilder (icke stränga) över kuperad terräng. I dessa uppträder måttliga variationer i bildskalan till följd av att kameraaxeln lutar något, och av att terrängen inte är plan.

Skalvariationer till följd av lutande kameraaxel

Lutande kameraaxel (Figur 12.8a) medför att bildskalan gradvis förändras över bilytan. De i terrängen lika långa sträckorna d_1 och d_2 avbildas olika långa (d_1' resp. d_2'). Detta är särskilt märkbart vid snedbilder, som fotograferas med kraftigt lutande kameraaxel.

Skalvariationer till följd av objektets topografi

I kuperad terräng (Figur 12.8b) varierar flyghöjden över mark med markens höjdvariationer i olika delar av landskapet. Därigenom varierar också bildskalan. Högre (närmare) liggande terrängdetaljer avbildas i större bildskala än lägre (längre bort) liggande detaljer, och bildskalan kommer att variera kontinuerligt med landskapets topografi.

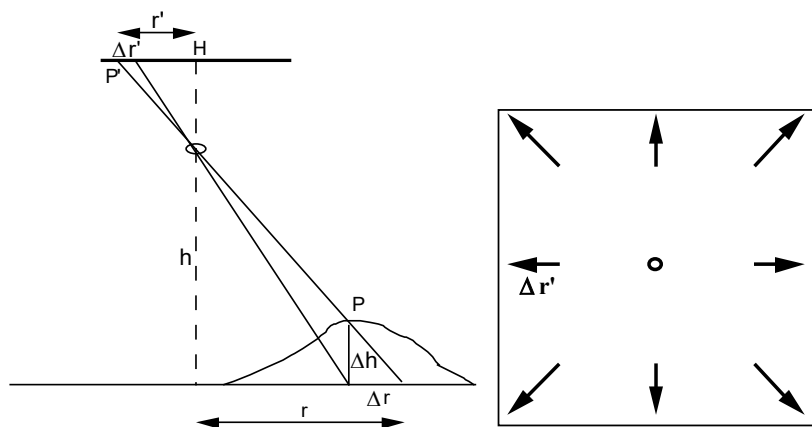


Figur 12.8. Skalvariationer i en flygbild till följd av a) lutande kameraaxel, b) terrängens topografi. De i terrängen lika långa sträckorna d_1 och d_2 avbildas olika långa som d_1' resp. d_2' .

Genom att fotograferingsriktningen i flygbilder inte är strängt lodrät, och terrängen innehåller höjdskillnader, förvanskas även längder, vinklar och arealer något i centralprojektion. En enkelbild går därför i princip inte att använda för att åstadkomma en ortogonal projektion, dvs. för att framställa en geometriskt noggrann karta. Genom parvis fotografering av landskapet med stereoövertäckning och stereoskopisk utvärdering av bildparet, eller genom omprojicering av en flygbild till ett ortofoto, kan detta problem lösas. Teknik för detta kommer att behandlas i fortsättningen (avsnitt 13.1 och 13.2).

12.3.2 Radiell höjddeplacering

Höjdskillnader i terrängen (eller i andra avbildade objekt) medför som nämnts skalvariationer i bilden. Dessutom medför de, att avbildade objekt kommer att förskjutas från de lägen i bilden de skulle ha fått, om terrängen varit plan. I en (sträng) lodbild är dessa deplaceringar radiella, dvs. riktade från eller mot bildens centrum. I Figur 12.9 avbildas ett objekt med höjden Δh i en lodbild. Objektet kan vara exempelvis ett träd, en byggnad eller en bergshöjd, dvs. terrängens topografi. Dess topp P avbildas i punkten P på avståndet r' från bildcentrum H. Bildpunkten P' blir förskjutet sträckan $\Delta r'$ på grund av att objektpunkten P ligger höjden Δh över markplanet.



Figur 12.9. Radiell höjddeplacering $\Delta r'$. Högra figuren visar nio höga objekt avbildade med radiell deplacering i en lodbild. Det centrala objektet deplaceras inte ($r'=0$ ger $\Delta r'=0$). Observera hur r' mäts!

Förskjutningens storlek kan beräknas. Ur likformiga trianglar erhålls

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta r'}{r'} \quad \text{och} \quad \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta h}{h}$$

som kan kombineras till

$$\frac{\Delta r'}{r'} = \frac{\Delta h}{h}$$

Om formeln skrivs

$$\Delta r' = r' \left(\frac{\Delta h}{h} \right)$$

kan höjddeplaceringens storlek $\Delta r'$ beräknas, om objektets höjd är känd. Om exempelvis höjden på ett berg över angränsande terräng avläses via nivåkurvor på en karta, så kan bergshöjdens deplacering beräknas.

Skrivs samma formel i stället

$$\Delta h = h \left(\frac{\Delta r'}{r'} \right)$$

kan objektets (ett hus, ett träd) höjd beräknas, om dess höjddeplacering $\Delta r'$ mäts i bilden. Men då fordras, att läget även för objektets bas kan ses i bilden. En flack bergshöjd kan alltså inte höjdmätas på detta sätt, men däremot en brant bergskärning.

Deplaceringens storlek $\Delta r'$ varierar alltså med flyghöjden h , med höjdskillnadens storlek Δh och med bildpunktens avstånd r' från bildcentrum. (Deplaceringen varierar också med kamerakonstanten c , men eftersom även radien r' gör det i samma mån, blir

relationen $\Delta r'/r'$ oberoende av c .) Högre liggande terrängpunkter (bergshöjder, byggnader, träd) förskjuts mot bildens kanter, medan lägre punkter (dalgångar, raviner, gruvhål) förskjuts mot bildens mitt. Se Figur 12.9. I hörnen av en vidvinklig flygbild är deplaceringen ungefär lika stor som höjdskillnaden Δh omräknad till bildens skala (ty där är $r' \approx c$, vilket ger $\Delta r' \approx \Delta h/m$).

Radiell höjddeplacering är egentligen samma sak som variationer i bildskala på grund av terrängens höjdvariationer. Höjer sig terrängen närmare kameran, så ökar avbildningsskalan och bild detaljer vandrar radiellt utåt från bildcentrum.

Höjddeplaceringen gör det möjligt att stereobetrakta par av bilder och är en förutsättning för stereoskopisk höjdmätning (som kommer att behandlas i avsnitt 13.2).

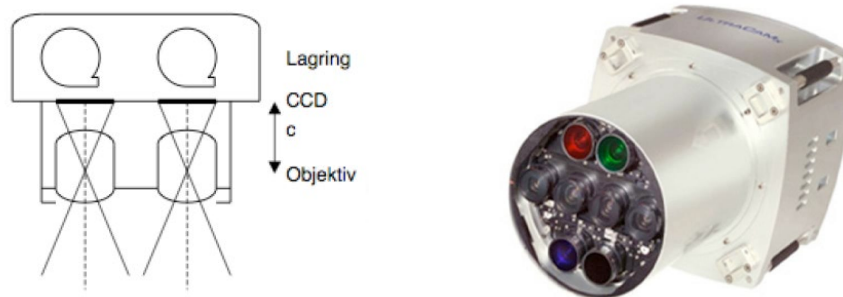
12.3.3 Mätkameran

En fotogrammetrisk mätkamera karakteriseras av att den har en stabil och noggrant uppmätt inre geometri. Man säger att kameran är kalibrerad. Objektivet är antingen fast monterat i kameran eller fokuserbart i ett antal fasta, väldefinierade lägen. Eftersom flygkameror används vid mycket långa avstånd, kan deras objektiv inställas för detta och monteras fast. Objektivet har ett fast läge i förhållande till bildplanet genom att även CCD-sensorn är fast monterad. Den s.k. bildhuvudpunkten H definieras som läget av den tänkta punkt, där kameraaxeln skär bildplanet. Bildhuvudpunktens läge ges av rad- och kolumnvärdet (r, k) för motsvarande bildelement i bildmatrisen.

(Fotografiska kamerors objektiv är sammanbyggda med en stödrum, mot vilken filmen trycks vid exponeringen. Stödrumen innehåller distinkta rammärken, som därigenom avbildas i alla bilders kanter. Med hjälp av rammärkena kan bildhuvudpunktens läge bestämmas.)

Kamerans kalibrering utförs av tillverkaren och dokumenteras i ett kalibreringsprotokoll. Där anges bildhuvudpunktens läge och kamerakonstanten c , dvs. avståndet från bildhuvudpunkten till projektionscentrum i objektivet (Figur 12.10). Dessutom uppmäts objektivets avvikelser från den ideala centralprojektion, den s.k. optiska felteckningen. (Mer om detta senare.) De kalibrerade måtten utnyttjas vid fotogrammetrisk mätning i bilder. Kameran kan även kalibreras matematiskt genom s.k. självkalibrering i samband med blocktriangulering, se avsnitt 13.2. Bilder som tas med en kalibrerad mätkamera kallas mätbilder.

Flygmätkameran (Figur 12.10) är en seriekamera, vilket innebär att den automatiskt kan exponera en serie bilder med ett visst tidsintervall mellan varje exponering. Den monteras upphängd i en vibrationsdämpande ring, som monteras över ett hål i flygplanets golv. Flygmätkameror tillverkas med objektiv med olika kamerakonstanter och med olika bildformat. De får därigenom olika öppningsvinklar, och CCD:n kan ha olika pixelstorlek och olika antal pixlar. Se tabell 13.1.



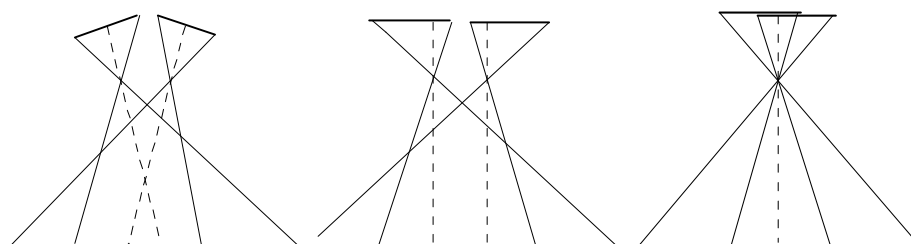
Figur 12.10. Principskiss och bild av flygmätkamera (Vexcel UltraCam X).

Rörelseoskärpa på grund av flygplanets hastighet under exponeringen kan motverkas med bildrörelsekompensation, antingen med en kort förflyttning av CCD-sensorn i flygriktningen under själva exponeringen eller digitalt med en form av fördröjning av utläsningen av bildelementen i CCD:n. Detta är särskilt viktigt vid flygfotografering från låga flyghöjder.

Tabell 12.1. Karakteristiska data för några exempel på digitala flygkameror. c är kamerakonstanten, FoV (Field of View) betyder objektivets öppningsvinkel (tvärs x längs stråket), Pix är bildelementets storlek, MP är bildstorleken i megapixel. b/h avser bas/höjdförhållandet, som förklaras i avsnitt 14.3. Data avser den pankromatiska bilden. Kvantisering, se avsnitt 12.2. (*Pix/rad)

	Z/I DMC (2000)	Z/I DMC II 250 (2011)	Vexcel UltraCamXp	Vexcel UltraCamE	Leica ADS80
CCD-typ	Matris	Matris	Matris	Matris	Rad
Bildformat mm	166x92	90x84	104x69	104x68	156x0
c mm	120	112	100	80	65
FoV°	69x42	46x39	55x37	66x46	46x0
$Pix \mu m$	12	5,6	6,0	5,2	6,5
MP	106	250	196	260	24000*
b/h (60%)	0,32	0,28	0,27	0,34	
Kvantisering (bit)		14	>12	>12	

En *CCD-matris* ger en hel bild simultant. Men svårigheter föreligger att tillverka CCD-matriser i de stora bildformat, som ger tillräcklig bildupplösning för flygfotogrammetri. Därför har några tillverkare tagit fram kamerapaket med flera parallella, något snedställda kameror, vardera med en mindre CCD-matris. De digitala delbilderna räknas i efterhand ihop till en stor bild. Se Figur 12.11. I samband med sammansättningen av delbilderna till en gemensam centralprojektion justeras de för radiell felteckning och andra systematiska fel. Därigenom blir den slutliga bilden en så gott som perfekt centralprojektion.

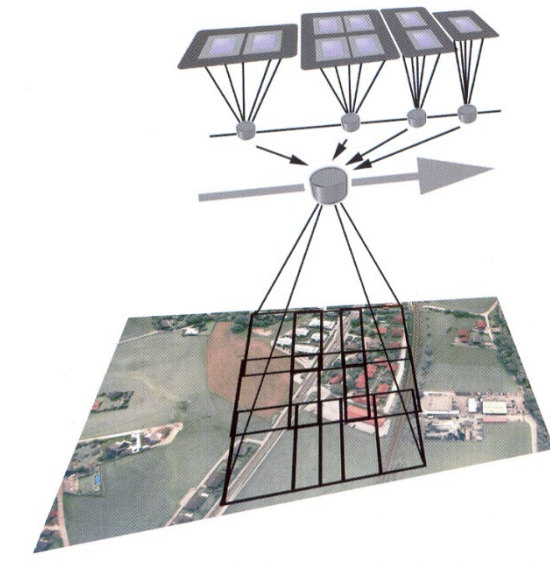


Figur 12.11. Principen för sammanräkning av delbilder till en gemensam centralprojektion. Snedbilderna rektifieras till lodbilder med parallella kameraaxlar och translernas sedan tills kameraaxlarna sammanfaller. Snedbildernas lutningar är här överdrivna.

Kamerapaketen innehåller dessutom fyra färgkameror med något lägre detaljupplösning, filtrerade för att registrera i B, G, R respektive IR. I en efterföljande digital process, s.k. panskärpning, kan dessa delbilder räknas samman med den högupplösta svart-vita bilden (Pan) till högupplösta färgbilder (B, G, R och Pan) eller IR-färgbilder (G, R, IR och Pan).

Exempel på flygkameror

Vexcel Corp. marknadsför kameror UltraCam (Figur 12.12) med vardera fyra kameror, som exponeras så, att de ger nio delbilder. Dessa räknas samman till en högupplöst pankromatisk bild, se Figur 12.12. Kameran har dessutom fyra lågupplösta färgkameror, filtrerade för att registrera i B, G, R respektive IR. De pankromatiska bildelementen är 5,2 - 6 μm stora och den sammanräknade bilden blir 200-260 MP stor med bildformatet 104 x 68 mm. Den kan kombineras med de fyra färgkanalerna till en färgbild eller en IR-färgbild.



Figur 12.12. Den pankromatiska bilden sammansätts av delbilder från flera CCD-matriser. (Vexcel UltraCam).

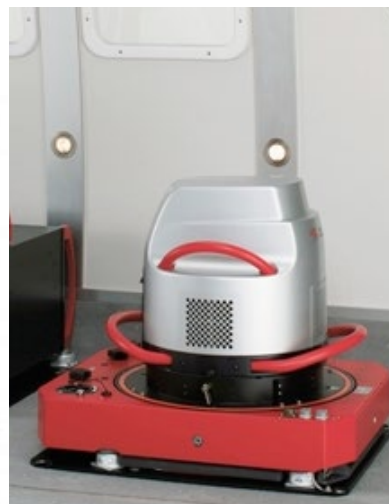
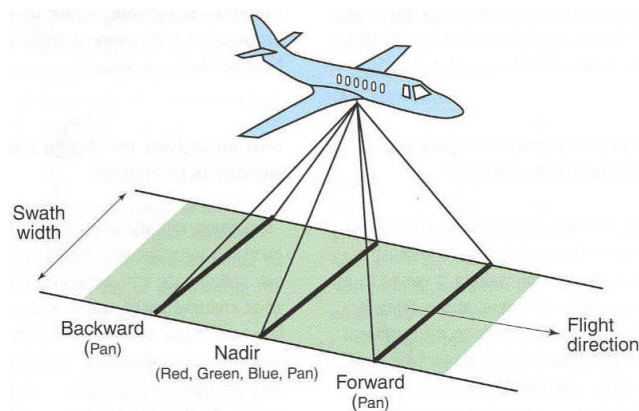
Intergraphs äldre kamera DMC från år 2000 används fortfarande. Även i den räknas fyra delbilder, dvs. fyra separata centralprojektioner, ihop till en bild, en nära nog perfekt centralprojektion med kamerakonstant 120,00 mm och bildformat 166x92 mm. Den sammansatta pankromatiska (svart-vita) bilden består av 106 x 106 bildelement (dvs. 106 MP), vardera med storleken 12x12 μm . Den kan kombineras med fyra lågupplösta färgkanaler (B, G, R, IR) till en färgbild eller en IR-färgbild. Öppningsvinkeln tvärs flygstråket är 69°, längs flygriktningen 42°.

Hexagon/Intergraphs senaste kamera DMC II, har den hittills största CCD som tillverkats om 90 x 84 mm och med bildstorleken 250 MP med 5,6 μm bildelement (Figur 12.4). Den har även fyra färgkameror i lägre upplösning. Med s.k. panskärpning kan delbilderna i B, G, R och IR räknas samman med den högupplösta svart-vita bilden till högupplösta färg- eller IR-färgbilder.

CCD-rader är lättare att tillverka än CCD-matriser. Leica Geosystems, gör därför en kamera i form av en skanner med långa, tvärställda CCD-rader (Figur 12.13), som avsöker landskapet kontinuerligt under flygningen. Skannern har tre CCD-rader, en lodrätt nedåt, en snett framåt och en snett bakåt, och kallas därför trelinjeskanner. Genom att kombinera bilder från de tre CCD-raderna kan stereomodeller rekonstrueras.

Kapitel 12: Fotogrammetri och flygbilder

Den lodrätt riktade används för att skapa ett ortofoto (en bildkarta). I Leicas kamera omfattar varje CCD-rad 24 000 bildelement om vardera $6,5 \mu\text{m}$, och öppningsvinkeln (tvärs stråket) är 46° . Dessutom har kameran särskilda CCD-rader för de tre grundfärgerna (B, G, R) och för närinfrarött (IR). Därigenom kan färg- och IR-färgbilder skapas.



Figur 12.13. En trelinjeskanner (Leica Geosystems ADS 80) monterad i flygplanet, och dess marktäckning.

Varje skannad rad av bildelement utgör en egen centralprojektion och måste knytas geometriskt till de föregående och efterföljande raderna, för att den resulterande, kontinuerliga bilden ska kunna geometriskt rektifieras och utvärderas fotogrammetriskt. Trelinjeskannern är därför helt beroende av ett navigeringssystem, som kontinuerligt registrerar kamerans läge och kameraaxelns riktning. Systemet är baserat på GPS och tröghetsnavigering. Utvärderingsprocessen utnyttjar en speciell programvara och är starkt automatiserad.

För mark- och fordonsbunden fotogrammetri används *terrestra mätkameror* med CCD-matriser för mindre bildformat. Se avsnitt 14.4.

12.3.4 Inre och yttre orientering. Kalibrering

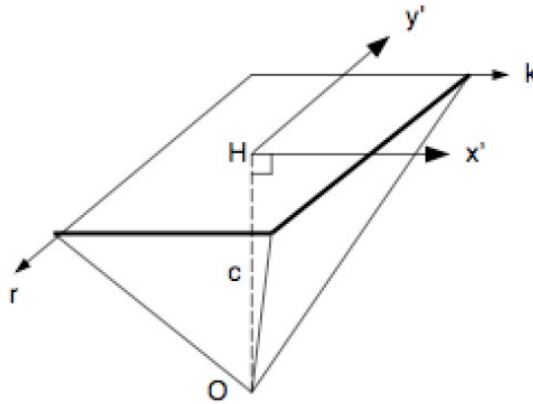
Strålkärven

I exponeringsögonblicket förbinds varje punkt i objektet (på marken) med sin motsvarande bildpunkt via en rät ljusstråle genom objektivet projektionscentrum. Tillsammans bildar alla dessa ljusstrålar en strålkärve (se Figur 12.6). Strålkärven kan tänkas delad i två, en yttre, utanför kameran, och en inre, i kameran. Fotogrammetrisk mätning baseras på, att den yttre strålkärven kan rekonstrueras optiskt eller matematiskt med hjälp av den inre. Utgångspunkter för rekonstruktionen är dels att kamerans inre geometri är känd, dvs. att kameran är kalibrerad, dels att bilddetaljens lägen i bilden kan mätas.

Mätkamerans (och därmed mätbildens) inre och yttre orientering är de grundläggande data, som beskriver kamerans inre geometri och dess läge och riktning när bilden togs. Den inre orienteringen beskriver bildplanets läge i förhållande till projektionscentrum, medan den yttre orienteringen beskriver kamerans läge i ett yttre koordinatsystem och kameraaxelns riktning i detta system. Tillsammans beskriver de relationen mellan bilden och objektet.

Inre orientering

Mätkamerans inre geometri, dess inre orientering, bestäms som nämnts genom kalibrering av mätkameran vid tillverkningen. Då mäts de storheter som fordras för att den yttre strålkärven ska kunna rekonstrueras matematiskt ur mätningar i bilden. Observera alltså, att bestämning av den inre orienteringen syftar till att kunna rekonstruera den yttre strålkärvens form!



Figur 12.14. En mätkamerans inre orienteringsdata. H är bildhuvudpunkten, som utgör origo för bildkoordinatsystemet $(x' y')$. Läget för H definieras genom läget $(r, k)_H$ för motsvarande digitala bildelement. O är projektionscentrum i objektivet och c är kamerakonstanten.

För att rekonstruera den yttre strålkärven, dvs. alla strålar som den består av, måste läget av projektionscentrum (O) vara bestämt i förhållande till bildplanet. Se Figur 12.14 (och jämför Figur 12.6!). Därigenom kan de mätta punkternas lägen i bildplanet räknas om till riktningar hos motsvarande inre bildstrålar. Tänker man sig dessa förlängda ut genom objektivet, kan samtidigt de yttre bildstrålarnas riktningar (dvs. den yttre strålkärven) rekonstrueras.

Läget av O definieras med hjälp av kamerans inre orientering, dvs. av

- bildhuvudpunkten (H), dvs. läget av fotpunkten (!) för normalen från projektionscentrum (O) mot bildplanet, och
- kamerakonstanten (c), dvs. normalens längd eller avståndet OH från projektionscentrum till bildplanet.

Bildhuvudpunkten H sammanfaller (nära) med bildcentrum, och dess läge anges av motsvarande bildelement $(r, k)_H$ i CCD-matrisen med origo i bildhörnet. Värdet på $(r, k)_H$ hämtas ur kamerans kalibreringsprotokoll. Sträckan HO och dess förlängning kallas *kameraaxel* och anger kamerans fotograferingsriktning.

Bilddetaljernas lägen i bilden mäts på datorskärm som koordinater (r, k) i bildmatrisen med origo i övre vänstra bildhörnet. *Bildkoordinatsystemet* $(x' y')$ definieras emellertid med origo i bildhuvudpunkten H och x' -axeln i flygriktningen. Bilddetaljernas lägen räknas därför om från de mätta koordinaterna (r, k) till bildkoordinater $(x' y')$ via läget $(r, k)_H$ för bildhuvudpunkten.

Sammanfattning

En mätkamerans inre orientering bestäms genom kalibrering av kameran. Bilder som tas med en mätkamera kallas mätbilder. Den yttre strålkärven vid exponeringen kan återskapas ur mätbilden genom rekonstruktion av den inre orienteringen. Det görs genom att

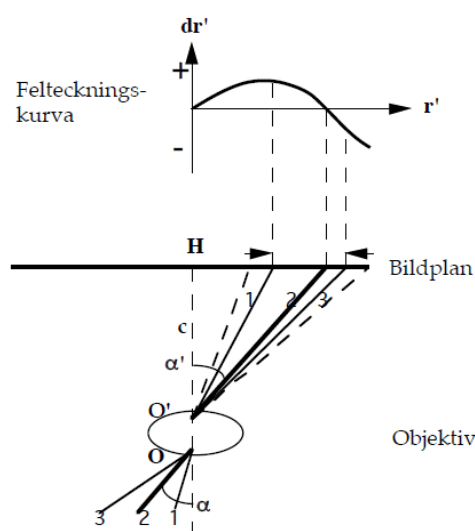
- ange bildens kamerakonstant,
- ange bildhuvudpunktens läge i bildmatrisen,
- mäta bildkoordinater för önskade bildpunkter, och
- korrigera mätta bildkoordinater för avvikelser från centralprojektion, främst radiell felteckning (se nedan).

Varje bildpunktsläge som mäts, resulterar i en rekonstruerad stråle i den yttre strålkärven.

Radiell felteckning

I praktiken blir en bild inte en sträng centralprojektion. Ljusrefraktion i atmosfären och ofullkomligheter i kamerans optik och i CCD:n är exempel på orsaker till små avvikelser från centralprojektion. I den mån sådana s.k. systematiska fel kan beskrivas matematiskt, så kan de korrigeras efter bildmätningen. Här kommer radiell optisk felteckning att beskrivas, eftersom den bestäms vid kamerans kalibrering.

Ett flygkameraobjektiv består av ett sammansatt system av glaslinser, konstruerat för att ge en så skarp bild som möjligt. Däri kan två projektionscentra, ett yttre och ett inre, definieras. (Vi har i tidigare resonemang förenklat detta till ett gemensamt projektionscentrum.) De bildalstrande strålarna löper vid exponeringen samman i yttre projektionscentrum och lämnar objektivet från inre projektionscentrum.



Figur 12.15. Radiell felteckning. Underst visas ett tvärsnitt av kameran med tre infallande ljusstrålar. Stråle 2 (fet) representerar en felteckningsfri stråle ($\alpha' = \alpha$). Stråle 1 har positiv felteckning, medan stråle 3 har negativ. Överst visas motsvarande felteckningskurva.

Från inre projektionscentrum definieras kamerakonstanten. I ett felteckningsfritt objektiv är de inre strålarna parallella med de yttre (Figur 12.15, stråle 2).

Om däremot felteckning föreligger, fortsätter inte strålarna i samma riktning efter att ha passerat objektivet utan bryts något från eller mot bildhuvudpunkten H (Figur 12.15, stråle 1 resp. 3). Ljusbrytning från bildhuvudpunkten (stråle 1) betecknas positiv, brytning mot denna (stråle 3) negativ.

Av den felteckningsfria strålen 2 framgår, att radien r' från bildhuvudpunkten till bildpunkten är en funktion av den infallande strålens vinkel α mot kameraaxeln:

$$r' = c \tan \alpha$$

Föreligger felteckning dr' modifieras radiens funktion till

$$r' = c \tan \alpha + dr'$$

där dr' kan vara positiv eller negativ.

Felteckningen är i stort sett symmetrisk kring bildhuvudpunkten. Den är alltså konstant för varje given radie (dvs. radiell) och kan därför uttryckas som funktion av radien. Den radiella felteckningsfunktionen, dvs. felteckningen som funktion av radien, uttryckt som

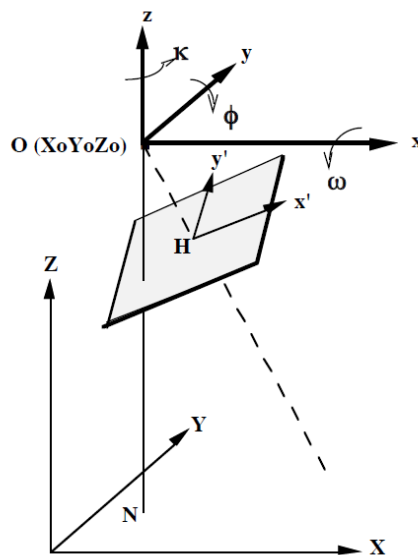
$$dr' = f(r') = r' - c \tan \alpha$$

mäts upp vid kamerakalibreringen och redovisas numeriskt och grafiskt i en felteckningskurva, som visar felteckningens storlek och riktning som funktion av bildens radie r' . En felteckningskurva redovisas överst i Figur 12.15.

I moderna flygkameror uppgår felteckningen till högst ett par μm och kan därför i många fall negligeras, medan den i andra kameratyper kan uppgå till $\pm 50 \mu\text{m}$. De mätta bildkoordinaterna kan korrigeras numeriskt för felteckningen. En digital bild kan omsamplas, dvs. "ritas om" bildelement för bildelement, till en felteckningsfri bild, sedan bildelementens korrigerade lägen beräknats. Detta utförs normalt vid sammanräkningen av delbilder till en gemensam centralprojektion, se Figur 12.11.

Yttre orientering

De *yttre orienteringselementen* definierar kamerans och den yttre strålkärvens läge och riktning vid exponeringen. De utgörs av tre markkoordinatvärden ($X_0 Y_0 Z_0$) för läget av kamerans yttre projektiionscentrum (exponeringsorten) och tre vinklar (ω, ϕ, κ ; omega, fi och kappa) för kameraaxelns riktning. Vinklarna är definierade kring ett rätvinkligt, treaxligt koordinatsystem med origo i projektiionscentrum O och axlarna parallella med det markkoordinatsystemets. Se figur 13.16, där bilden dock teknats i s.k. positivläge, dvs. rättvänd och framför projektiionscentrum. Detta är en vanlig representationsform i fotogrammetrin (jämför Figur 12.6, där bilden ligger i spegelvänt negativläge).



Figur 12.16. Bildens (eller kamerans) yttre orientering. Bilden är ritad i positivläge, dvs. framför projektiionscentrum O . H betecknar bildhuvudpunkten och $x' y'$ bildkoordinater. N är nadirpunkten. Kameraaxeln är streckad.

Kapitel 12: Fotogrammetri och flygbilder

Geografiska koordinatsystem (avsnitt 2.2) är ju egentligen inte strikt rätvinkligt tredimensionella. Plankoordinaterna definieras utifrån ellipsoiden via en vald kartprojektion, medan höjdkoordinaten definieras vinkelrät mot geoiden. Lokalt kan dock i praktiken ett tredimensionellt markkoordinatsystem användas. I denna framställning (och i all lokal mätning) betraktas markkoordinatsystemet som ett rätvinkligt högerhandssystem och betecknas (XYZ) .

Punkten N i Figur 12.16 kallas *nadirpunkt* och är den terrängpunkt som ligger lodrätt under projektionscentrum. Sträng lodbild innebär att kameraaxeln pekar mot nadirpunkten. Då gäller $\omega = \phi = 0$, medan κ då betecknar kamerans (dvs. bildens) vridning runt kameraaxeln. Stränga lodbilder kan i praktiken aldrig uppnås vid flygfotografering. För normala lodbilder gäller $(\omega, \phi) \leq 5$ gon. Är vinklarna (väsentligt) större, talar man om *snebilder*.

De yttre orienteringselementen för en flygbild kan bestämmas på olika sätt. Redan under flygfotograferingen kan de bestämmas med integrerade navigationssystem, se nedan. De kan också bestämmas med fotogrammetriska metoder. Ur en enkelbild bestäms de med enkelpunktsinskränning, med hjälp av minst tre signalerade *stödpunkter* på marken med kända markkoordinater (berörs i avsnitt 13.2 och 14.1 nedan). Indirekt kan de bestämmas genom blocktriangulering eller stereoskopisk orientering och mätning av bildpar (se 13.2 nedan).

Integrerade navigationssystem

Flygplanet kan förses med mottagarantenn för satellitpositionering (GNSS). Därigenom erhålls värden på kamerans (egentligen yttre projektionscentrums) läge vid varje exponering. Kameran förses med gyron för tröghetsnavigering (TN eller eng. INS, Inertial Navigation System) för att bestämma kameraaxelns riktning i fotograferingsögonblicket, dvs. vinklarna $(\omega \phi \kappa)$. I ett integrerat navigationssystem stöttar dessa system varandra, och de yttre orienteringselementen kan bestämmas med relativt god noggrannhet redan under flygningen.

Systemet för tröghetsnavigering består av tre accelerometrar, som mäter linjära accelerationer utefter tre ortogonala axlar, och tre gyron som mäter vinkelhastigheter runt dessa axlar. Vinkelhastighet är vinkelförändring per tidsenhet. Om man känner till axlarnas utgångsbärningar kan man stegvis beräkna nya bärningar framåt i tiden. Dessa vinklar kan användas för att bestämma vinklarna $(\omega \phi \kappa)$. Vissa tröghetssystem är kardanskt upphängda för att ständigt vara orienterade i ett yttre koordinatsystem. Andra sitter fast monterade på plattformen, s.k. "strapdown"-system. De senare är vanligast för orientering av flygkameror och laserskannrar, eftersom de direkt mäter utrustningens rörelser.

Tröghetssystem mäter under korta tidsintervall med hög noggrannhet, men med kraftig avdrift med tiden. GNSS-teknik lämpar sig mycket väl för att korrigera för denna avdrift. Å andra sidan riskerar man att förlora kontakten med satelliterna vid GNSS-mätning, t.ex. när flygplanet svänger kraftigt och antennen skymms för satelliterna. Med TN kan fortsatt positionsbestämning utföras, till dess kontakt med satelliterna åter etablerats. Mycket arbete har därför lagts ned på att ta fram effektiva navigationssystem som integrerar GNSS och TN. Resultatet blir 1) ett effektivt stöd för piloten att navigera de planerade flygstråken, 2) automatisk utlösning av kameran i förvalda lägen, och 3) relativt bra värden på kamerans yttre orientering vid varje exponering. Standardosäkerheten för projektionscentrums läge i rymden blir under en dm. Dessa yttre orienteringsvärden räcker tyvärr ändå inte för fotogrammetrisk stereoskopisk mätning.

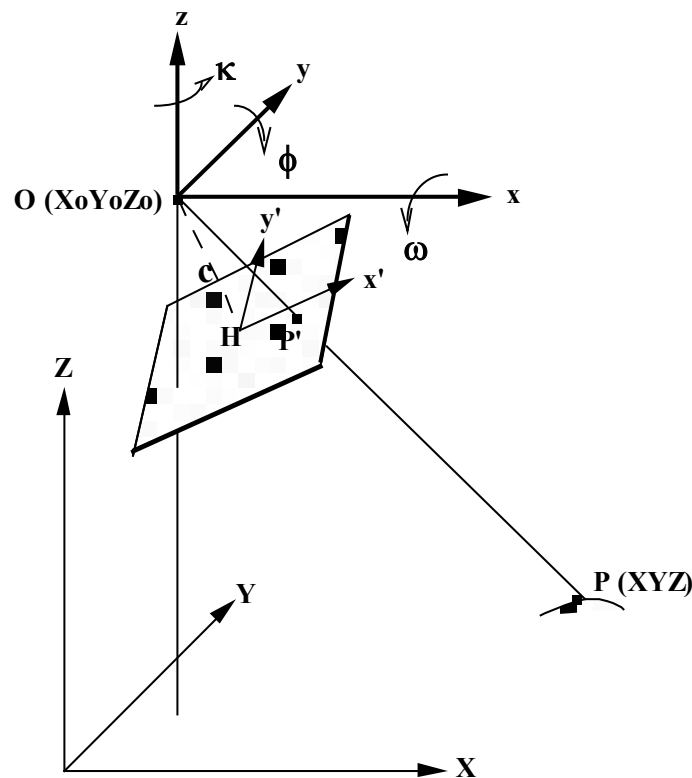
Som vi ska se senare (avsnitt 13.2), utgör de emellertid utmärkta utgångsvärden för beräkning av noggranna yttre orienteringsdata ur bildmätningar med hjälp av blocktriangulering.

12.3.5 Kolinearitet

Kolinearitet är en matematisk beskrivning av en centralprojicerad ljusstråle. Den inkluderar kamerans (dvs. bildens) inre och yttre orientering.

Varje ljusstråle från ett objekt i landskapet till bildplanet bär information om objektet och dess läge. Informationen lagras i bildplanet i den digitala bildens centralprojektion. För att återskapa det avbildade objektets storlek, form och läge fordras att ljusstrålen kan rekonstrueras utifrån bildpunktens läge i bilden.

I exponeringsögonblicket ligger en objektpunkt P , objektivets projektionscentrum O och motsvarande bildpunkt P' på rät linje utefter en ljusstråle. Se Figur 12.17, där liksom i Figur 12.16 bilden tecknats i positivläge.



Figur 12.17. Kolinearitet. Vektorerna (strålarna) OP och OP' är kolineära. Bilden är ritad i positivläge, dvs. framför projektionscentrum O .

Begreppet kolinearitet avser den matematiska beskrivningen av detta förhållande. Strålarna (vektorerna) OP' och OP sägs vara kolineära. (Latinets ko- betyder gemensam, jfr Kooperationen.) Vektorn OP' kan beskrivas om den *inre* orienteringen är känd, riktningen för OP kan beräknas om även den *yttre* orienteringen är känd.

Begreppet kolinearitet är centralt i analytisk fotogrammetri och ska här illustreras med sitt grundläggande formelsamband. Den matematiska utvecklingen och den analytiska tillämpningen av sambandet anges dock här endast skissartat.

Det s.k. kolinearitetsvillkoret uttrycker, att objektvektorn OP kan återskapas som bildvektorn OP' multiplicerad (förlängd) med en skalfaktor m , dvs.

$$OP = m \cdot OP'$$

eller i vektorform

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = m R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -c \end{pmatrix}$$

$(X Y Z)$ är koordinaterna för objektpunkten P , och $(X_0 Y_0 Z_0)$ för projektiionscentrum O , båda i det *yttre* markkoordinatsystemet. Differensen $(X Y Z) - (X_0 Y_0 Z_0)$ utgör alltså längden av vektorn OP .

$(x' y' -c)$ är de tredimensionella bildkoordinaterna för bildpunkten P' . "Höjd"-koordinaten $(-c)$ i bildkoordinatsystemet är konstant och lika med kamerakonstanten för alla bildpunkter. (Att den är negativ beror på definitionen av z-axeln i det lokala koordinatsystemet med origo i projektiionscentrum O .) Differensen $(x' y' -c) - (0 0 0)$ utgör alltså längden av vektorn OP' .

Skalfaktorn $m = OP/OP'$ är på grund av markens topografi unik för varje enskild bildstråle och därför okänd. (Om den vore känd eller kunde bestämmas, skulle bara en bild behövas för fotogrammetrisk mätning, men så är nu tyvärr inte fallet.)

R är en rotationsmatris, dvs. en matris som roterar ett koordinatsystem runt dess tre axlar. Matrisen beskriver bildkoordinatsystemets $(x' y' -c)$ vridning runt axlarna $(x y z)$ (överst i figur 13.17) eftersom bilden inte kan antas vara en sträng lodbild. Axlarna $(x y z)$ är parallella med de yttre koordinataxlarna $(X Y Z)$. Vridningens storlek anges av kamerans yttre orienteringsvinklar $(\omega \phi \kappa)$. Rotationsmatrisen innehåller 3×3 st trigonometriska uttryck $(r_{11} - r_{33})$ av rotationsvinklarna $(\omega \phi \kappa)$ runt x-, y- resp. z-axeln:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Utveckling av villkoret

Kolinearitetsvillkoret kan utvecklas till samband mellan mark- och bildkoordinater. Med dessa samband kan omräkning göras mellan bildkoordinatsystemet $(x' y')$ och markkoordinatsystemet $(X Y Z)$. Förutsättningen är emellertid, att såväl de inre orienteringselementen (c, H, dr') som de sex yttre orienteringselementen $(X_0 Y_0 Z_0 \omega \phi \kappa)$ är kända. Den okända skalfaktorn (m) kan däremot elimineras i formelhanteringen. Utvecklas villkoret så, att bildkoordinater $(x' y')$ uttrycks som funktioner av markkoordinater $(X Y Z)$, talar man om *fotograferingsfallet*:

$$x' = -c \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y' = -c \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

Om man känner objektpunktens P läge och bildens inre och yttre orientering kan alltså bildpunktens P' läge $(x' y')$ i bildmatrisen bestämmas. Att det faktiskt kan vara av intresse, bl.a. för framställning av ortofoto, ska senare visas.

Uttrycks i stället objektkoordinater som funktioner av bildkoordinater, talar man om

projektionsfallet:

$$X = X_0 + (Z - Z_0) \frac{x'r_{11} + y'r_{12} - cr_{13}}{x'r_{31} + y'r_{32} - cr_{33}}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0) \frac{x'r_{21} + y'r_{22} - cr_{23}}{x'r_{31} + y'r_{32} - cr_{33}}$$

Här syns tydligt, att markkoordinaterna ($X Y Z$) inte kan bestämmas ur en enkelbild. Punktens höjd Z i landskapet ingår i högerledet och måste alltså vara känd, för att dess läge i plan ($X Y$) ska kunna bestämmas. Orsaken är (indirekt) den okända skalfaktorn (m).

Tillämpningar

Kolineariteten ligger till grund för flera fotogrammetriska operationer:

1) Med *enkelpunktsinskränning i rymden* kan man bestämma den yttre orienteringen för en lod- eller snedbild med känd inre orientering. Minst tre stödpunkter fordras. Med stödpunkter menas identifierbara punkter i objektet med kända markkoordinater ($X Y Z$). Stödpunkterna kan behöva signaleras så, att de blir synliga i bilden, och deras bildkoordinater ($x' y'$) mäts. Kolinearitetsvillkor ställs upp för dessa punkter. Ett ekvationssystem erhålls, med minst tre par kolinearitetsekvationer i fotograferingsfallet. Ekvationssystemet lineariseras runt närmevärden och löses med avseende på de sex yttre orienteringselementen ($X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi, \kappa$). Är systemet överbestämt, dvs. fler än tre stödpunkter används, utjämnas det med minsta kvadrat-metoden. Detta är en tredimensionell fotogrammetrisk motsvarighet till geodetisk stationsetablering (inskränning, fri station).

2) Beräkning av tredimensionella modellkoordinater ($x y z$) med hjälp av *stereofotogrammetri* görs som en skärning i rymden av två strålar, en från vardera bilden. Strålarnas riktningar uttrycks som kolineariteter, och skärningspunkten utgör objektpunktens P läge. Stereofotogrammetri kommer att behandlas i kapitel 13.

3) Med *blocktriangulering* kan den yttre orienteringen bestämmas samtidigt för ett stort antal flygbilder (ett block) över ett större, flygfotograferat område. Metoden kan formuleras som en samtidig, gemensam lösning av kolinearitetsekvationer för ett stort antal mätta bildpunkter i många flygbilder. Blocktriangulering kommer att behandlas i avsnitt 13.2.

4) Vid *framställning av ortofoto* skall bilddetaljernas radiella höjddeplacering korrigeras bort. Korrektionen utförs pixelvis i bilden. Varje enskilt bildelement tilldelas ett nytt läge, fritt från höjddeplacering. Det nya läget beräknas med hjälp av kolinearitetsekvationerna i fotograferingsfallet. Höjdvärdet Z för motsvarande objekt punkt måste därvid vara känt och hämtas därför ur en digital höjdmodell. Ortofototeknik kommer att behandlas i avsnitt 13.1 och digitala höjdmodeller i avsnitt 14.2.

-----*****-----

Status: Enbart enstaka ändringar gjordes 2021 (ingen revidering).

13 Fotogrammetriska metoder

13.1 Enkelbildsmetoder

13.1.1 Fotokarta

En karta som kombinerar ritad kartinformation med en fotobild kallas fotokarta eller bildkarta. Exempel är Lantmäteriets fastighetskarta och skogskartor. Vanligt skalområde är 1:5000–1:20 000. Fotobilden i kartan är ett ortofoto, dvs. en flygbild, i vilken effekterna av bildlutningen och av markytans topografi har eliminerats (egentligen har de reducerats till acceptabel nivå). Ortofotot är därmed en (approximativ) ortogonalprojektion av terrängen, och kombinerar den ritade kartans (kartdatabasens) geometriska egenskaper med flygbildens informationsinnehåll. Fotokartor behandlas även i avsnitt 14.3.

13.1.2 Rektifiering

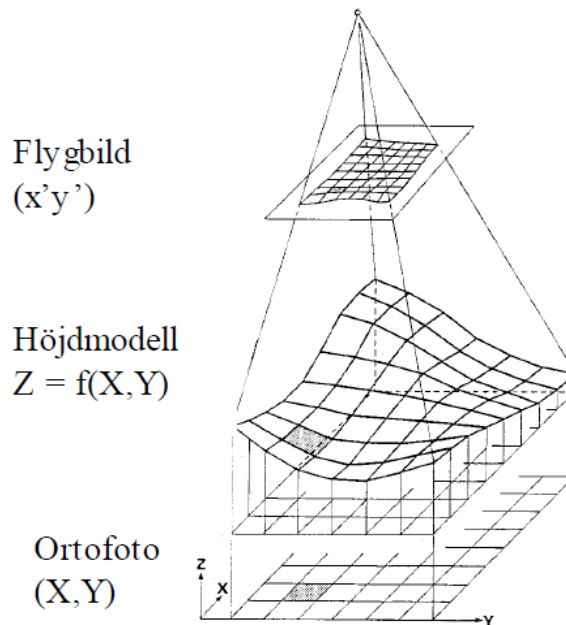
Det går att visa, att om terrängen (objektet) är plan(t), kan ett matematiskt, s.k. projektivt samband ställas upp mellan objektets plan och bildens. Se Figur 12.8a. Detta utnyttjas vid rektifiering av bilden. Med rektifiering omprojiceras en lodbild eller snedbild till sträng lodbild. Samtidigt kan bilden förstöras till förvald skala. Genom rektifiering elimineras geometriska fel orsakade av kameraaxelns lutning (se avsnitt 12.3). Den rektifierade bilden motsvarar således en sträng lodbild i en förvald medelskala, men om landskapet inte är helt plant innehåller bilden fortfarande radiella höjddeplaceringar och (måttliga) skalvariationer beroende på topografin.

Rektifierade och skalbestämda bilder har använts – ofta tillsammans med viss ritad kartinformation och text – som enkla fotokartor. Vanliga användningsområden var för skogliga ändamål och för presentation av fysiska planer, t.ex. utbyggnadsområden och vägprojekt. Den gamla Ekonomiska kartan var baserad på en rektifierad bildmosaik. Enkla fotokartor har numera i stort sett ersatts av digitala ortofoton, ortofotokartor och 3D snedperspektiv.

13.1.3 Ortofoto

Princip och framställning

Ett ortofoto är en flygbild, i vilken förutom bildlutningen även markytans radiella höjddeplaceringar $\Delta r'$ (se avsnitt 12.3) eliminerats (egentligen har de reducerats till acceptabel nivå). Ortofotot är därmed en (approximativ) ortogonalprojektion av terrängen, och kombinerar den ritade kartans (eller kartdatabasens) geometriska egenskaper med flygbildens informationsinnehåll.



Figur 13.1. Principen för ortofototeknik

Vid framställning av ett ortofoto utgår man från en digital flygbild och en digital höjdmodell och genererar ortofotot i en digital arbetsstation. Det digitala ortofotot får samma uppbyggnad som flygbilden: en matris av bildelement (r, k) med var sina gråvärden eller färger. Skillnaden är, att ortofotots bildelement ligger i kartmässigt rätta lägen (X, Y) , se Figur 13.1). Att omvandla flygbilden till ett ortofoto medför alltså, att bildelementen ges nya lägen (eller ges nya gråvärden i givna lägen, om man så vill). Ordet "gråvärde" kan ersättas med "färg" om ortofoto i färg ska framställas.

Man utgår från en tom bildmatris utan gråvärden, dvs. ett blivande ortofoto utan bilddetaljer men med ett givet geografiskt läge. Bildelementen i denna ska tilldelas gråvärden, ett i taget. För att ta reda på vilket gråvärde ett av ortofotots bildelement $(r, k)_O$ ska få, utgår vi från det bildelementets kartkoordinater (X, Y) , som ju är desamma som den avbildade objekt detaljens markkoordinater. Höjdkoordinaten (Z) för detta läge i landskapet erhålls med hjälp av en digital höjdmodell av landskapet, dvs. ett tätt raster av höjdpunkter $Z = f(X, Y)$. Den digitala höjdmodellen måste tidigare ha mätts in med fotogrammetriska eller geodetiska metoder eller med flygburen laserskanning och lagrats i en databas.

Nu kan läget i flygbilden för motsvarande bildelement $(r, k)_B$ med bildkoordinaterna (x', y') beräknas utifrån det valda ortofotoelementet med kartkoordinaterna (X, Y) och höjdvärdet (Z) . Läget beräknas med kolinearitetsvillkoret i flygfotofallet. Vi modellerar helt enkelt flygfotograferingssituationen matematiskt, se avsnitt 12.3:

$$x' = -c \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y' = -c \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

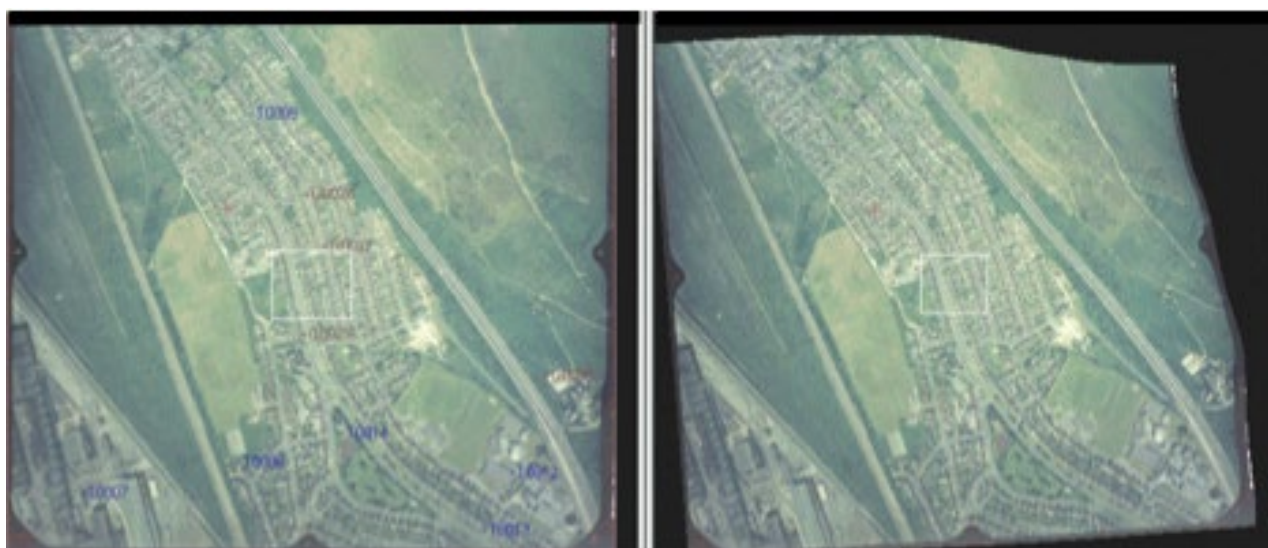
För att lösa ekvationerna måste bildens yttre orientering (dvs. projektiionscentrums läge (X_0, Y_0, Z_0) och kameraaxelns riktning ω, ϕ, κ) först bestämmas. Det görs med integrerad GNSS-teknik och tröghetsnavigering vid flygfotograferingen, följd av

Kapitel 13: Fotogrammetriska metoder

blocktriangulering (se nedan, avsnitt 13.2). Elementen ($r_{11}, r_{12}, \dots, r_{33}$) i ekvationerna ovan återfinns i rotationsmatrisen \mathbf{R} , och kan beräknas ur vinklarna ($\omega \phi \kappa$). Även den inre orienteringen (c och H , som ger origo för bildkoordinaterna ($x' y'$), se avsnitt 12.3) måste vara känd.

Nu har vi beräknat läget ($x' y'$) för det bildelement i den inskannade, digitala flygbilden, som motsvarar läget av objektpunkten ($X Y Z$) i landskapet och läget ($X Y$) i ortofotot. Via den inre orienteringen beräknar vi bildelements läge (r, k)_B i bildmatrisen ur ($x' y'$). Därefter kan vi "hämta" det bildelementets färgvärde och tilldela det till det valda läget ($X Y$) i ortofotot, dvs. till bildelementet (r, k)_O i den tomma ortofotomatrixen. Det första bildelementet är därigenom inlagt i det blivande ortofotot.

Proceduren upprepas för nästa bildelement. Så byggs ortofotot upp, bildelement för bildelement. Proceduren måste alltså upprepas lika många gånger som antalet bildelement i det blivande ortofotot. Resultatet blir en ny flygbild med homogen skala och kartmässig ortogonalprojektion, ett ortofoto. Se Figur 13.2.



Figur 13.2. En flygbild (till vänster) och motsvarande ortofoto (till höger). Tydligt ligger en bergshöjd i bildens övre högra hörn. Bergshöjdens radiella deplacering i bilden har korrigerats i ortofotot.

Ortofotots geometriska kvalitet

Ett ortofotos geometriska kvalitet är beroende dels av noggrannheten i ursprungsbildens yttre orientering, dels av den digitala höjddatabasens noggrannhet och täthet.

Fel i yttre orienteringens vinklar inverkar på noggrannheten i plan ungefär lika starkt över hela bildytan. Som riktvärde kan anges, att vinklarna måste bestämmas med ett medelfel under en bågminut.

Fel i höjddatabasen inverkar på mätosäkerheten i plan kraftigast runt ortofotots kanter. (Inte alls i nadir, dvs. nära bildcentrum! Jämför avsnitt 12.3 om radiell höjddeplacering.) Lägesfelen i plan i ortofotot kan bli av samma storleksordning som mätosäkerheten i höjd i höjddatabasen. Lantmäteriets nya höjddatabas NNH (Ny Nationell Höjddatabas), som baseras på flygburen laserskanning, har i praktiken en mätosäkerhet i höjd på 0,2-0,5 m, medan den nuvarande rikstäckande höjddatabasen har en mätosäkerhet i höjd om ca 2,5 m. Ortofoton från lägre flyghöjder fordrar mer detaljerade digitala höjddatabaser för att få tillräcklig geometrisk kvalitet.

Eftersom varje bildelement i den digitala bilden är väsentligt mindre än höjdmodellens punktavstånd, måste höjdmodellen interpoleras (omräknas) till samma täthet som bildmatrisen. En flygbild från 1500 m höjd kan ha ca 0,1 x 0,1 m bildelement i markens skala, medan Lantmäteriets hittillsvarande höjddatabas har punkttätheten 50 m, och NNH får punkttätheten 2 m. Interpolationen av höjdvärdena kan medföra geometriska fel i ortofotot, särskilt om inte höjdmodellen försetts med topografiska brytlinjer, som förhindrar, att tvära höjdskillnader interpoleras till mjuka sluttningar. Detta blir särskilt märkbart vid t.ex. raviner, skärningar, broar, viadukter och vägkanter. Med flygburen laserskanning från lägre höjd (se kapitel 16) eller digital bildmatchning (som kommer att behandlas i avsnitt 13.2) kan mycket detaljerade höjdmodeller skapas. Därigenom minskar inverkan av interpolation.

Ett särskilt problem innebär byggnader, som inte alltid ingår i modellen eller är ofullständigt återgivna. Deras radiella deplacering kvarstår. Ett annat problemområde är tät skog, som reducerar antalet mätbara höjdpunkter väsentligt och därigenom lokalt sänker kvalitén på ortofotot.

Lägesfelen i ortofotot kan begränsas, om objektiv med längre kamerakonstant, dvs. med smalare öppningsvinkel, används, och om övertäckningen planeras så, att endast centrala delar av bilderna behöver användas i den bildmosaik, som sammansätts av de enskilda ortofotona.

Praktiska aspekter på ortofoton och deras användbarhet behandlas i avsnitt 14.3.

13.1.4 Snedperspektiv

Ett alternativt sätt att presentera flygbilder är som snedperspektiv. Därvid omräknas lodbilden till en snedbilds perspektiv, med fritt vald yttre orientering (dvs. fritt valt läge för projektionscentrum och fritt vald riktning på kameraaxeln). Omräkning och omsampling görs med stöd av en digital höjdmodell enligt samma princip som för digitalt ortofoto. Man kallar tekniken att ”draperas” flygbilden på den digitala höjdmodellen. Upprepas sådan omräkning från en serie perspektivpunkter i rad efter varandra, kan realistiska videosekvenser av ”genomflygningar” över ett landskap eller genom en stad genereras.

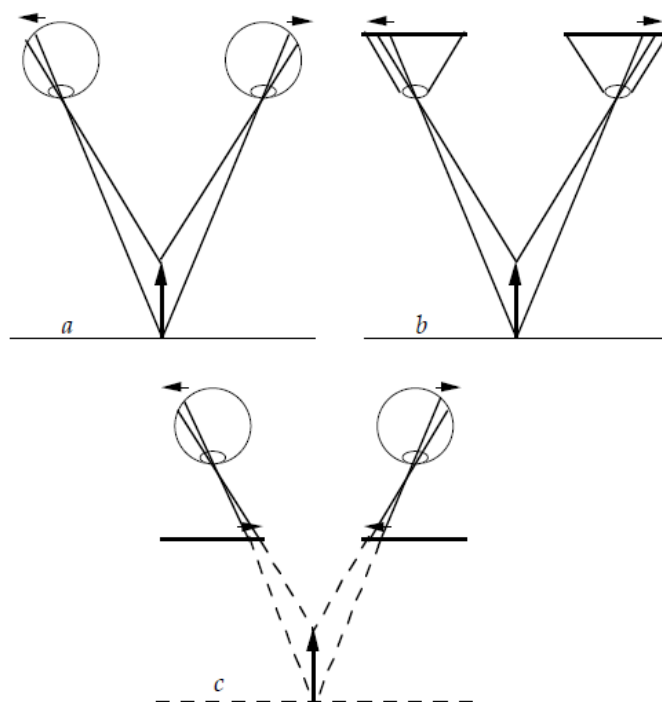
Ett snedperspektiv eller en genomflygning kan kombineras med ritad information, som omritats eller kontinuerligt omritas i samma perspektiv, t.ex. för att åskådliggöra resultatet av planerade byggprojekt. Tekniken kallas ofta VR (eng. Virtual Reality), visualisering eller något oegentligt 3D-presentation. Tekniken används även av kommersiella webb-applikationer, t.ex. Google Earth.

13.2 Stereofotogrammetri

13.2.1 Stereoskopisk mätning

Stereoseendet och stereomodellen

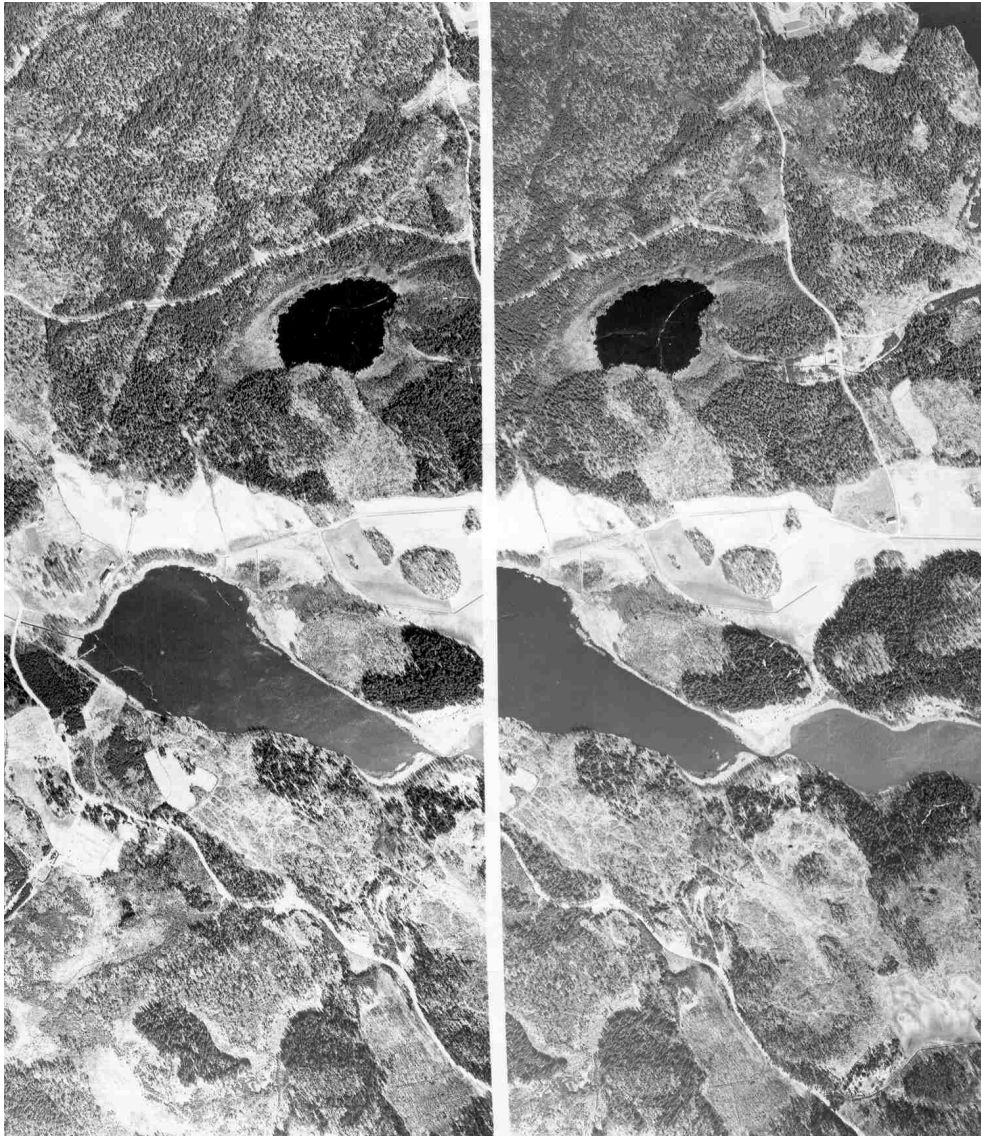
Stereoseende, dvs. stereoskopiskt djupseende (”3D-seende”), är en viktig förutsättning för manuell fotogrammetrisk mätning. Det möjliggör en tredimensionell upplevelse av det objekt som skall mätas och ger en noggrannare definition av resp. mätpunkt. Fysiologiska och psykologiska synegenskaper såsom detaljupplösning och förmåga att koncentrera sig på detaljer påverkar stereoseendet.



Figur 13.3. Stereoseendet. a) Direkt stereoseende. b) Stereofotografering. c) Stereoskopisk betraktning av bildkopiorna eller bildpresentationen.

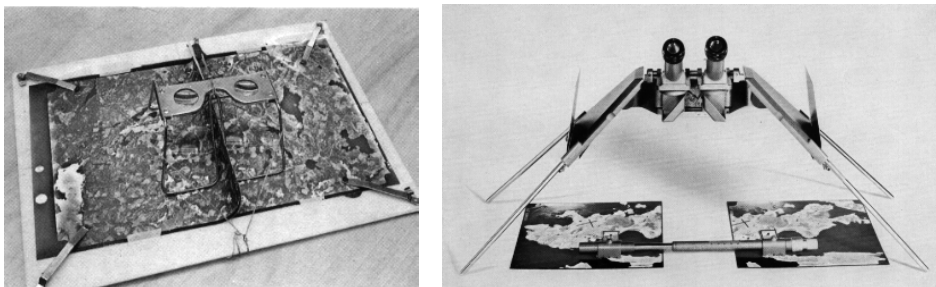
Stereoseendet är ögonens och främst hjärnans förmåga att uppfatta omvärlden tredimensionellt. Denna förmåga beror på, att våra två ögon uppfattar scenen i något olika perspektiv (se Figur 13.3). Föremål på olika avstånd från betraktaren förskjuts i sidled i förhållande till varandra vid projektion på ögonbottarna. Sidoförskjutningarna kallas i fysiologiska sammanhang visuell disparitet, bland fotogrammetriker horisontal- eller *x-parallax*. De två geometriskt något olika synintrycken sammansmälts i hjärnan till ett djupintryck.

Stereoseendet kan utnyttjas för att återskapa djupintryck med hjälp av ett stereoskopiskt bildpar. Fotografering eller annan avbildning med stereoskopisk övertäckning mellan bilderna (se Figur 12.1 och Figur 13.3) medger att de parvis kan betraktas med var sitt öga. Eftersom såväl kameran som ögat avbildar via centralprojektion, kommer horisontalparallaxer att uppträda även i ett stereoskopiskt fotograferat bildpar. Figur 13.4 visar ett stereogram, dvs. ett monterat utsnitt ur ett stereobildpar.



Figur 13.4. Ett stereogram, dvs. ett monterat utsnitt ur ett stereobildpar. Bilden kan ses i stereo med hjälp av ett linsstereoskop. Försök betrakta figuren utan stereoskop med parallella ögonaxlar genom att se "genom" papperet. (Bild Lantmäteriet/Metria. Bilderna godkända för spridning)

Om bildparet med sina horisontalparallaxer projiceras till ögonbottenarna, vänster bild till vänster öga och höger bild till höger öga, "luras" hjärnan att uppleva det avbildade objektet tredimensionellt. Utskrivna bilder kan efter viss träning betraktas utan hjälpmedel eller med linsstereoskop. Om större utskrivna bilder ska betraktas, används spegelstereoskop (Figur 13.5), vars speglar medger att bilderna placeras längre från varandra.



Figur 13.5. Linsstereoskop (Zeiss) med bildpar monterat på fältbräde samt spegelstereoskop med stereomikrometer (Leica)

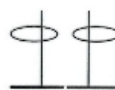
Kapitel 13: Fotogrammetriska metoder

För att erhålla stereoseende på en datorskärm måste de båda bilderna i stereoparet presenteras på skärmen så att vardera ögat ser var sin bild. Detta kan åstadkommas med tudelad skärmbild och monterat stereoskop eller med bilderna på var sin skärm och en halvgenomskinlig spegel. Men vanligen projiceras de två bilderna på varandra. Då föreligger några olika möjligheter, se Figur 13.6:

- Bilderna infärgas i rött och blått, och operatören bär glasögon, som är färgade på samma sätt (anaglyfmetoden),
- med polariserande skärm, som polariserar bilderna vinkelrätt mot varandra, och glasögon som polariserats på samma sätt,
- ”blinkmetoden” utnyttjar glasögon med flytande kristaller, så bilderna visas omväxlande med hög frekvens eller
- med lentikulär ("tvättbrädsformad") skärm.

Dessa metoder medger att flera personer kan se i stereo på skärmen samtidigt. Mätning kan alternativt göras separat i vardera enkelbilden. Detta kan vara fördelaktigt i vissa fall, t.ex. vid mätning i industrimiljöer.

Delad skärm och optiskt stereoskop



Anaglyfprojektion



Polariserad projektion



Högfrekvent blinkmetod

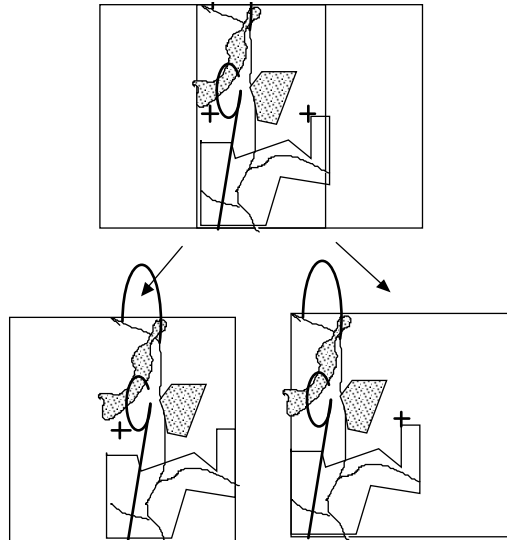


Lentikulär skärm



Figur 13.6. Fem sätt att presentera stereobilder på datorskärm.

I fotogrammetriska arbetsstationer utnyttjas stereoseendet för mätning. Fotografering för fotogrammetrisk mätning genomförs därför genomgående med minst 60 % övertäckning mellan bilderna (Figur 13.7). Avståndet mellan exponeringsorterna (projektionscentra) kallas *fotograferingsbasen* eller enbart *basen*. Motsvarande sträcka avbildad i vardera bilden kallas *bildbasen*.



Figur 13.7. Ett tecknat stereobildpar som visar resultatet av flygfotografering med ca 60 % stereövertäckning. Sträckan mellan bildernas centrumkryss i den övre figuren motsvarar fotograferingsbasen. I bilderna kallas den bildbasen.

Begreppet *stereomodell* avser att åskådliggöra den tredimensionella upplevelsen av ett avbildat objekt eller landskap, som stereobetraktning kan ge. I fotogrammetrisk vokabulär avser det även den mätbara modell, som kan rekonstrueras ur bilder. Stereomodellen är då en likformig rekonstruktion av objektet i ett lokalt, fristående koordinatsystem, som normalt är knutet till projektionscentra och basen. Modellen behöver inte ha skalbestämts. Dess form är alltså bestämd, men inte alltid dess storlek och läge. Denna modell kan i efterhand skalbestämmas och transformeras till ett yttre markkoordinatsystem.

Bild- och modellkoordinater

Läget hos ett avbildat objekt i ett stereoskopiskt bildpar kan mätas och uttryckas som *bildkoordinater* $(x' y')$ i vänster bild och $(x'' y'')$ i höger bild. Bildkoordinatsystemens origo ligger i resp. bildhuvudpunkt H (se Figur 12.14). Digitalt kan de uttryckas som rad och kolumn (r, k) i resp. bildmatris med origo i bildens hörn. X-axlarna pekar i bildbasens riktning, dvs. i flygriktningen. Ur de mätta bildkoordinaterna och den inre orienteringen rekonstrueras de yttre strålkärvarna, dvs. ljusstrålarna vid fotograferingen, matematiskt (analytiskt) som vektorer. Villkor kan beräknas för att vektorerna från motsvarande bilddetaljer i vardera bilden (s.k. homologa punkter) ska skäras parvis.

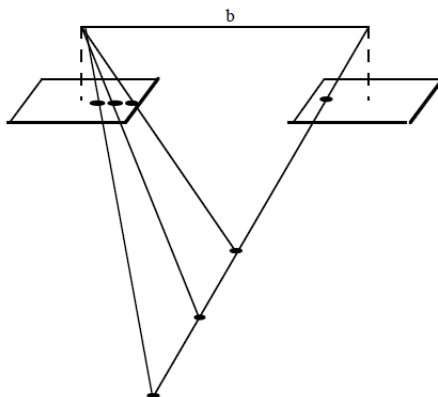
Därefter kan tredimensionella *modellkoordinater* $(x y z)$ beräknas för strålparsens skärningspunkter. Denna samlade mängd av beräknade modellkoordinater för det avbildade objektet kan också betraktas som en stereomodell. Modellkoordinaterna transformeras till ett givet, yttre koordinatsystem, och utgör därefter *objektkoordinater* $(X Y Z)$, dvs. de sökta markkoordinaterna. Detta är stereofotogrammetris huvuduppgift. Mätningen utförs under stereoseende i digitala arbetsstationer.

Principerna för dessa mätningar och beräkningar ska beskrivas i det följande.

Mätmarke och parallax

På dataskärmen finns inprojicerat ett s.k. *mätmarke*, en tydlig mätpunkt, en markör, vars läge i den stereoskopiska modellen kan regleras i tre dimensioner. Med mätmärket markeras de bilddetaljer, som ska mätas i båda bilderna. Mätmärket består därför i

princip av två märken, ett för vardera bilden, vilka stereoskopiskt sammansmälter till ett rydmmätmarke, som kan förflyttas i tre dimensioner. Se Figur 13.8. I princip är det alltså justering av avståndet mellan mätmärkena som ger intryck av dess rörelse i djupled. På en datorskärm utgörs dock mätmärket ofta av en markör, och de två bilderna ligger på varandra på skärmen. Förflyttas bilderna parallellt över skärmen, förskjuts modellen horisontellt relativt mätmärket. Ändras avståndet mellan bilderna, ger det intryck av att modellen rör sig i djupled relativt mätmärket.



Figur 13.8. Det fotogrammetriska mätmärkets princip. Mätmärkenas (eller bildernas) förflyttning relativt varandra i bildplanet ger ett intryck av tredimensionell förflyttning i modellrymden.

Parallaxen p i ett bildpar definieras som skillnaden i bildkoordinater (dvs. i läge) i vänster och i höger bild för en detalj, som avbildats i båda bilderna. Den kan uppdelas i en horisontal- eller x -parallax px och en vertikal- eller y -parallax py . Bildkoordinaternas x -axlar pekar i bildbasens riktning, dvs. i flygriktningen. X -parallaxer uppträder därför i fotograferings- eller ögonbasens riktning, och definieras som

$$px = x' - x''$$

där x' är bildkoordinat för en viss bilddetalj i vänster bild och x'' för samma detalj i höger bild. Varje "djupnivå" i den upplevda stereomodellen motsvaras av ett värde på x -parallaxen. X -parallaxerna är sålunda bärare av höjdinformationen i flygbildspar och en förutsättning för stereoseende.

13.2.2 Stereofotogrammetrins normalfall

Den analytiska principen

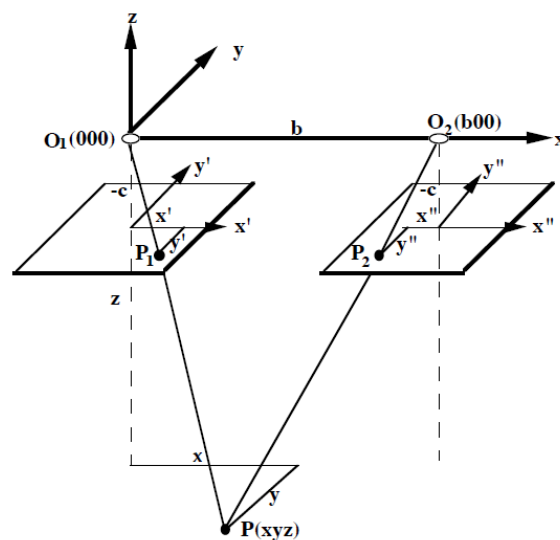
De analytiska beräkningsformlerna beskriver den geometri, som uppstår vid avbildning genom centralprojektion, och som utnyttjas vid rekonstruktion av en stereomodell ur två centralprojektioner. Formlerna är relativt komplexa genom att icke-linjära samband ingår, främst trigonometriska uttryck för bildernas och stereomodellens lutningar (se yttre orientering, avsnitt 13.3). Tekniken ger möjlighet till mycket noggrann fotogrammetrisk mätning genom bildpresentationen på skärm, genom stereoseendet och genom att systematiska felkällor i fotograferings- och mätprocessen kan formuleras matematiskt och korrigeras. Dessa analytiska metoder tillämpas på digitala bilder på dator. Man talar då om digital fotogrammetri.

Normalfallet

Den analytiska tekniken kan illustreras med parallaxformlerna vid flygfotogrammetrins normalfall, se figur 14.9. Med hjälp av enkla formler kan modellkoordinater för ett objekt bestämmas ur mätta bildkoordinater i ett bildpar. Stereofotogrammetrins

normalfall innebär emellertid en ideal fotograferingssituation, där kameraaxlarna (fotograferingsriktningarna) är *parallella och vinkelräta mot fotograferingsbasen*. Ordet "normal" betyder här vinkelrät. Y-parallaxen är då noll, dvs. parvisa bildpunkter har samma y-koordinat ($y' = y''$ i Figur 13.9). Vid flygfotogrammetri föreligger detta förhållande endast approximativt (normalfallet är absolut inget "normalt fall"!), men i markfotogrammetri, med stereokamera med fast bas (som kommer att behandlas i avsnitt 15.4), kan normalfallet föreligga med hög noggrannhet. Observera, att normalfallet *inte* fordrar stränga lodbilder, men att kameraaxlarnas riktning styr modellkoordinatsystemets axelriktningar.

Orsaken till att normalfallet, detta specialfall, behandlas är tvåfaldig. Dels utgör det en god illustration till den analytiska fotogrammetris annars ganska komplicerade teori, dels kan tekniken användas för att härleda fortplantningen av mätosäkerhet i den fotogrammetriska processen.



Figur 13.9. Flygfotogrammetris bild- och modellkoordinatsystem. Bilderna har förlagts i s.k. positivläge, dvs. rättvända och framför (under) resp. projektionscentrum. Bild- och modellkoordinatsystemen blir då likriktade.

$x' y' x'' y''$ är bildkoordinater med origo i resp. bildhuvudpunkt

$x y z$ är modellkoordinater med origo i vänster projektionscentrum

b är basen

c är kamerakonstanten (här negativ p.g.a. z-axelns definition)

O_1 och O_2 är projektionscentra. O_1 är origo för modellkoordinaterna

P_1 och P_2 är bildpunkter, P är motsvarande modellpunkt.

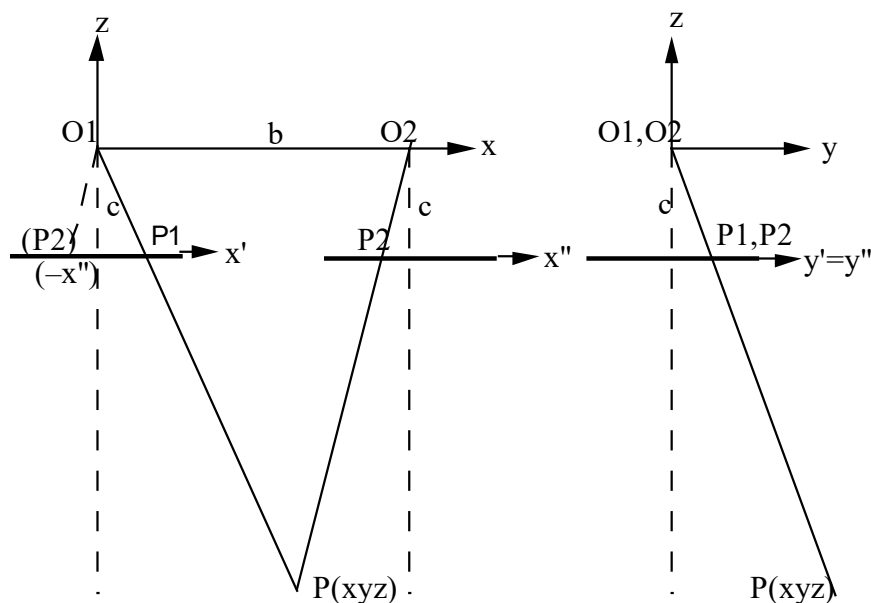
Parallaxformlerna i normalfallet

Parallaxformlerna ska här härledas för flygfotogrammetris normalfall. För enkelhetens skull förutsätter vi då även stränga lodbilder. (Markfotogrammetris normalfall behandlas i avsnitt 15.4.)

I bildparet i Figur 13.9 har bildkoordinaterna $(x' y')$ och $(x'' y'')$ för bildpunkterna P_1 resp. P_2 markerats. I normalfallet är som nämnts $y' = y''$, dvs. y-parallaxerna är noll. Projektionscentra O_1 och O_2 och objektpunkten P spänner upp ett plan, som då även innehåller bildpunkterna P_1 och P_2 .

Kapitel 13: Fotogrammetriska metoder

Samma situation har i figur 14.10 tecknats ur två perspektiv för att underlätta härledningen av parallaxformlerna. I högra perspektivet ligger strålarna O_1P och O_2P bakom varandra, eftersom punkterna P_1 och P_2 i normalfallet har samma y -koordinat ($y' = y''$). Planet O_1O_2P i den vänstra figuren representeras alltså av linjen $(O_1, O_2)(P_1, P_2)P$ i den högra.



Figur 13.10. Flygfotogrammetris normalfall, sett ur två perspektiv (jfr Figur 13.9).

$x' y' x'' y''$ är bildkoordinater

$x y z$ är modellkoordinater

b är basen

c är kamerakonstanten

O_1 och O_2 är projektionscentra, P_1 och P_2 är bildpunkter

Strålen $O_1(P_2)$ har konstruerats parallell med O_2P_2 för att underlätta härledningen av parallaxformlerna. Sträckan $P_1(P_2)$ utgör då parallaxen $p_x = x' - x''$

Parallaxformlerna i normalfallet kan med hjälp av likformiga trianglar i Figur 13.10 härledas enligt följande. Observera att kamerakonstanten c (dvs. bildernas z' -koordinat) alltid är negativ i flygfotofallet, och att $y' = y''$ i normalfallet.

$$x: \frac{x}{x'} = \frac{z}{-c} \quad \text{ger} \quad x = x' \frac{z}{-c}$$

$$y: \frac{y}{y'} = \frac{y}{y''} = \frac{z}{-c} \quad \text{ger} \quad y = y' \frac{z}{-c} = y'' \frac{z}{-c}$$

z -koordinaten härleds ur de likformiga trianglarna O_1O_2P och den konstruerade $P_1(P_2)O_1$, där strålen $(P_2)O_1$ har konstruerats parallell med P_2O_2 för att underlätta härledningen:

$$z: \frac{z}{-c} = \frac{b}{x' - x''} \quad \text{ger} \quad z = -c \frac{b}{x' - x''}$$

Sträckan $P_1(P_2)$ utgör x-parallaxen p_x , som definieras som

$$px = x' - x''$$

Alltså gäller

$$\frac{z}{-c} = \frac{b}{p_x} \quad \text{och} \quad z = -c \frac{b}{p_x}$$

Substitueras i formlerna för x och y

$$\frac{z}{-c} = \frac{b}{p_x}$$

erhålls *parallaxformlerna i flygfotogrammetris normalfall*:

$$x = x' \frac{b}{p_x} \quad y = y' \frac{b}{p_x} \quad z = -c \frac{b}{p_x}$$

Teoretiskt är ju $y' = y''$, men för att minimera effekten av små mätfel kan medelvärdet av dem användas i formeln.

Modellkoordinaterna x y z blir bestämda i ett lokalt system, vars *origo ligger i vänster projektionscentrum* (O_1 i Figur 13.9 och Figur 13.10). Systemets x-axel sammanfaller med basen och z-axeln är uppåtriktad från O_1 , dvs. motriktad vänster kameraaxel. Modellens z-koordinater blir därför alltid negativa!

Modellens skala $1:m$ kan (precis som kart- eller bildskalan) bestämmas ur en sträcka d på marken och motsvarande sträcka d' i modellen. Skalfaktorn m blir

$$m = \frac{d}{d'}$$

Av parallaxformlerna framgår emellertid, att modellens skala (i alla tre dimensionerna) bestäms av valt värde på basen b , eftersom b förekommer i täljaren i alla tre. Om fotograferingsbasen b_f kan bestämmas, så ger parallaxformlerna modellkoordinater i skala 1:1, dvs. i objektets (landskapets) skala. Om modellbasen väljs till ett annat värde b blir modellens skalfaktor m

$$m = \frac{b_f}{b}$$

Fotograferingsbasen kan bestämmas med hjälp av två kända punkter (s.k. *stödpunkter*) i objektet. Stödpunkternas bildkoordinater mäts och deras modellkoordinater beräknas med parallaxformlerna, men med basen b_f som okänd parameter. Sträckan mellan stödpunkterna beräknas därefter på två sätt, båda med Pythagoras' sats:

- 1) som sträckan d ur stödpunkternas modellkoordinater (x y z). Uttrycket för d kommer då att innehålla den okända basen b_f ,
- 2) som sträckan D ur stödpunkternas kända markkoordinater (X Y Z).

Sätts ($d = D$) så kan fotograferingsbasen b_f beräknas. Detta är ett moment i s.k. absolutorientering (som kommer att behandlas längre fram i detta avsnitt), nämligen skalbestämning av modellen.

Även origos läge (X_o Y_o Z_o) och modellkoordinatsystemets axelriktningar i det yttre markkoordinatsystemet (X Y Z) är okända. Modellkoordinatsystemet är således ett helt lokalt system. Med absolutorienteringens övriga moment kan det emellertid

horisonteras och inpassas i markkoordinatsystemet.

Eftersom kraven på normalfall och stränga lodbilder sällan är uppfyllda, ger dessa enkla parallaxformler resultat av begränsad noggrannhet. De är emellertid en god illustration till den analytiska fotogrammetrins princip. Dessutom kan de som sagt användas som utgångspunkt för en analys av mätningars mätosäkerhet, vilket kommer att utvecklas i avsnitt 14.3.

Höjdskillnadsformeln

En närbesläktad, enkel tillämpning av stereoskopisk mätning är bestämning av lokala höjdskillnader ur stereobildpar genom mätning med stereomikrometer under spegelstereoskop. Mätningen görs i utskriften av digitala bilder eller i äldre, fotografiska bilder. Tekniken tillämpas ofta som stöd vid flygbildstolkning, och utvecklas därför närmare i kompendier i bildtolkning, se t.ex. (Boberg 1995). Tekniken är praktiskt användbar, trots att den tillämpas på lodbilder, som inte kan anses stränga, varför normalfallet endast föreligger approximativt. Resultatet är därför behäftat med en inte försumbar mätosäkerhet.

Stereomikrometern (Figur 13.5) består av två glasplattor med ingraverade mätmärken, förbundna med en mikrometerskruv. Stereomikrometern inpassas på ett utskrivet bildpar så, att mätmärkena sammanfaller med samhörande bilddetaljer. Mätmärkena sammansmälter då till ett stereoskopiskt rymdmätmarke enligt principen i Figur 13.8.

Punkter på olika höjdnivå i objektet avbildas med olika stor parallax i bildparet. En höjdskillnad Δh mellan två punkter motsvaras sålunda av en skillnad i parallax mellan bildpunkterna. Parallaxskillnaden Δp_x , dvs. skillnaden i parallax mellan punkterna 1 och 2, är alltså

$$\Delta p_x = p_{x1} - p_{x2}$$

Parallaxskillnaden motsvarar summan (!) av det avbildade objektets höjddeplaceringar i de två bilderna. Parallaxskillnaden (men inte parallaxerna!) kan mätas med stereomikrometern. Därur kan höjdskillnaden beräknas som:

$$\Delta h = \frac{h \Delta p_x}{b' + \Delta p_x}$$

där h är flyghöjden och b' är bildbasen, dvs. flygfotobasens längd mätt i flygbildens skala. Denna formel är känd som *höjdskillnadsformeln*. Metoden förutsätter i princip flygfotografering enligt normalfallet och stränga lodbilder. Eftersom det verkliga fotograferingsfallet avviker något från detta, riskerar mätosäkerheten att bli stor, om höjdskillnader bestäms för punkter på längre avstånd från varandra. Endast höjdskillnader mellan näraliggande objekt kan därför bestämmas med denna metod. Dessutom behöver flyghöjd och bildbas bestämmas med så låg mätosäkerhet som möjligt.

13.2.3 Stereofotogrammetrins allmänna fall

Bild- och modellorientering

I verkligheten, speciellt i flygfotosammanhang, föreligger normalfallet med stränga lodbilder endast approximativt, och centralprojektionerna kan vara behäftad med fel, främst radiell felteckning. Förfarandet att bestämma och absolutorientera modellkoordinater blir då mer komplicerat, och måste utföras med datorstöd. I fortsättningen ska därför den analytiska tekniken vid ett allmänt flygbildsfall visas.

De moment som utförs syftar till att

- rekonstruera de yttre strålkärvarna (genom *inre orientering*),
- rekonstruera en stereomodell ur parvisa strålkärvar (genom *relativ orientering* och beräkning av modellkoordinater) och
- skalbestämma och orientera stereomodellen i ett yttre geografiskt koordinatsystem (genom *absolut orientering*).

Den principiella funktionen hos dessa orienteringsmoment ska här beskrivas. Framställningen är dock översiktlig, detaljlösningarna behandlas i större läroböcker eller kompendier (se litteraturlistan). Det praktiska utförandet varierar dessutom med de program, som marknadsförs för ändamålet.

Ett numera vanligare alternativ till relativ och absolut orientering av bildpar är att bestämma de enskilda bildernas yttre orienteringselement med hjälp av *block-triangulering*, som behandlas senare i detta avsnitt.

Inre orientering

Tidigare (i avsnitt 13.3) har redogjorts för hur kamerans inre orientering bestäms genom kalibrering. Kamerakonstanten, huvudpunktens läge och ev. felteckningsfunktion hämtas ur kamerans kalibreringsprotokoll. Här ska behandlas hur den inre orienteringen för en bild kan rekonstrueras i datorn ur kamerans kalibreringsdata och mätta bildkoordinater.

Med hjälp av programmets meny för inre orientering introduceras kamerakonstanten och bildhuvudpunktens läge $(r, k)_H$ för den kamera som använts vid flygfotograferingen. Felteckningsfunktionen, som korrigerar för radiell optisk felteckning (se avsnitt 13.3) och ev. en funktion som kompenserar för geometriska fel i kamerans CCD-sensor, aktiveras också med programmenyn.

Resultatet av den inre orienteringen är transformationsparametrar. Med dessa kan alla senare mätta bildpunkter (r, k) omräknas till korrigerade bildkoordinater (x', y') i kamerans koordinatsystem (se Figur 12.14). Genom att även kamerakonstanten är känd, kan därefter varje mätt bildpunkt generera en stråle (en vektor) OP' i den inre strålkärven, och därmed en stråle med riktning OP i den yttre (se Figur 12.16).

Relativ orientering

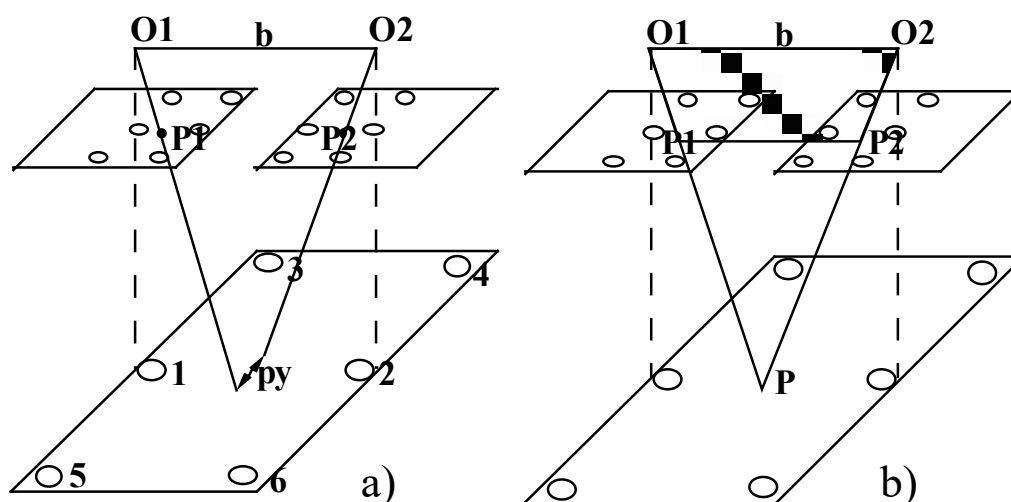
Som anas av Figur 13.9 är i ett orienterat flygbildspar bildkoordinaterna $y' = y''$, dvs. vertikal- eller y-parallaxer ($py = y' - y''$) ska inte förekomma. De försvårar eller omöjliggör stereoseende. Om de förekommer indikerar de, att bilderna i bildparet inte är orienterade i förhållande till varandra, så att en störningsfri stereomodell kan betraktas.

Relativorienteringen syftar till, att orientera de två strålkärvarna från bildparets två bilder till varandra så, att alla strålpar från samma bilddetaljer i höger respektive vänster bild parvis skär varandra och därmed skapar modellpunkter. Detta är ett försök till visuell presentation av vad som sker; i datorn beräknas skärningspunkter mellan vektorer.

I exponeringsögonblicket uppspanns ett plan av fotograferingsbasen (O_1O_2) och de två bildstrålar, som härrör från en och samma objektpunkt P . Detta framgår av Figur 13.8. Alla punkter P i objektet ger upphov till var sitt sådant plan (som kallas *epipolarplan*). Detta förhållande måste återskapas, för att man ska kunna se i stereo och rekonstruera en tredimensionell stereomodell ur bildparet. Med hjälp av relativ orientering skall

därför de två bildkoordinatsystemen roteras så, att detta förhållande återuppstår. (I de äldre, analoga stereoinstrumenten vreds bildhållarna rent fysiskt tills strålarna skar varandra parvis.) Därefter kan modellpunkternas koordinater beräknas ur vektorernas (strålarnas) skärningspunkter.

Ett allmänt flygfotofall innebär, att kameraaxlarna avviker något från normalfallet. Försöker man ändå att rekonstruera en stereomodell enligt normalfallet, uppträder vertikal-(y-)parallaxer, som medför, att de yttre strålarna inte skär varandra parvis. Se Figur 13.11a. Därigenom försvåras eller omöjliggörs stereoseendet. Relativorienteringens uppgift är att bestämma hur mycket de tredimensionella bildkoordinatsystemen $(x' y' -c)$ och $(x'' y'' -c)$ analytiskt ska "vridas" runt sina koordinataxlar, för att alla y-parallaxer i bildparet ska elimineras. Resultatet är en stereomodell.



Figur 13.11. Principen för relativ orientering. a) Bristande relativ orientering ger y-parallax p_y i stereomodellen. Motsvarande y-parallaxer $p_y = (y' - y'')$ kan uppmätas i bildparet. Läget för de sex s.k. von Gruber-lägena är markerade i bilderna och i modellen. b) Koplanaritetsvillkoret är uppfyllt när $p_y = 0$, dvs. när bildkoordinatsystemen vridits tills (O_1, O_2, P_2, P_1) utgör ett plan (skrafferat i figuren).

Modellpunktens P läge går ju ännu inte att bestämma. Det matematiska kravet på att ett plan har återskapats uttrycks därför så, att ett och samma plan ska spännas upp av tre vektorer, nämligen basvektorn $(O_1 O_2)$ och de två bildvektorerna $(O_1 P_1)$ och $(O_2 P_2)$. De tre vektorerna ska vara *koplanara*. Detta plan (O_1, O_2, P_2, P_1) är skrafferat i figur 14.11b.

Om sidorna $(O_1 P_1)$ och $(O_2 P_2)$ i detta plan förlängs, kommer de att mötas i och skapa modellpunkten P .

Analytisk relativorientering baseras således på det s.k. *koplanaritetsvillkoret*. Detta villkor kan uttryckas matematiskt i form av en determinant, som innehåller de tre vektorerna. Basvektorn tecknas

$$(O_1 O_2) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och de två (roterade) bildvektorerna

$$(O_1P_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -c \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad (O_2P_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = R_2 \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ -c \end{pmatrix}$$

Rotationsmatriserna \mathbf{R}_1 och \mathbf{R}_2 (jämför kolinearitet, avsnitt 13.3!) anger att de två bildvektorerna (dvs. bildkoordinatsystemen) $(x' y' -c)$ och $(x'' y'' -c)$ roteras kring sina axlar vinklarna $(\omega_1 \phi_1 \kappa_1)$ resp. $(\omega_2 \phi_2 \kappa_2)$ till dess villkoret om koplanaritet uppfyllts. Att villkoret är uppfyllt, kan matematiskt formuleras som att en determinant, bestående av de tre vektorerna, ska vara lika med noll:

$$\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Determinanten kan utvecklas till

$$b (y_1 z_2 - y_2 z_1) = 0, \text{ dvs. (eftersom basen } b \neq 0)$$

$$y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0$$

De fyra termerna $(y_1 y_2 z_1 z_2)$ i koplanaritetsvillkoret innehåller trigonometriska funktioner ur rotationsmatriserna \mathbf{R}_1 och \mathbf{R}_2 . Eftersom de är icke-linjära, serieutvecklas de kring närmevärden på rotationsvinklarna. (Lodbilder medför att närmevärdena kan sättas till noll.) Serieutvecklingen resulterar i, att y-parallaxer kan uttryckas som funktioner f av de fem relativorienteringselementen, dvs.

$$p_y = y' - y'' = f(\kappa_1, \kappa_2, \phi_1, \phi_2 \text{ samt } \omega_1 \text{ eller } \omega_2)$$

”Eller” i parentesen beror på, att ω -rotationen kan utföras med samma resultat antingen i höger eller i vänster bildkoordinatsystem, eftersom de roterar kring samma axel (x-axeln, dvs. basen, se Figur 13.9). Fem orienteringselement $(\kappa_1, \kappa_2, \phi_1, \phi_2 \text{ samt } \omega_1 \text{ eller } \omega_2)$ kan alltså bestämmas genom relativ orientering. Det går därför att visa, att det räcker med att fem strålpär orienteras till skärning, för att alla tusentals strålpär ska skäras. Relativorienteringen är då fullbordad och modellen återskapad. De optimala (bästa) lägena för dessa fem par bildpunkter (som motsvarar fem skärningspunkter) och för ett (sjätte) par kontrollpunkter, de s.k. von Gruber-lägena, är angivna i Figur 13.11.

Hur genomförs nu detta? Ur mätta bildkoordinater i minst fem punktpär beräknas vertikal-(y-) parallaxer p_y , och ett ekvationssystem om lika många ekvationer (koplanaritetsvillkor) ställs upp. Ur det kan de fem relativorienteringselementen lösas. Mätpunkterna som används för detta utgörs av tydliga terrängdetaljer, spridda i sådana lägen i bilderna (de sex von Gruberlägena), som medför effektivaste lösning av ekvationssystemet. Operatören (eller dataprogrammet, med digital bildmatchning av bilddetaljer med god kontrast) väljer lämpliga mätpunkter i dessa lägen, och det erfordras alltså inga signalerade eller inmätta stödpunkter i fält för detta moment. Med bildmatchning av många punktpär kan ekvationssystemet överbestämmas rejält.

Ur de fem beräknade relativorienteringselementen beräknas elementen $(r_{11} - r_{33})$ i rotationsmatriserna \mathbf{R}_1 och \mathbf{R}_2 för vänster resp. höger bildkoordinatsystem (jfr kolinearitet i avsnitt 13.3). Därigenom ges möjlighet att rotera bildkoordinatsystemen (dvs. omsampla bilderna) och erhålla (teoretisk) skärning mellan alla bildstrålpär, dvs. en numerisk stereomodell. På datorskärmen upplever man, att stereoseendet fungerar.

Brister i relativorienteringen (sådana uppträder alltid, ingenting är perfekt!) medför små restparallaxer också i x-led. Dessa gör att stereomodellen blir svagt deformerad i höjd, och att mätningar i modellen blir behäftade med viss systematisk mätosäkerhet.

Beräkning av modellkoordinater

En modellpunkts läge erhålls som skärningspunkten mellan två strålar, en från vardera bildpunkten genom respektive projektionscentrum. Vardera strålens riktning är bestämd av de mätta bildkoordinaterna, av kamerans inre orientering och av rotationsmatriserna. Formlerna för beräkning av modellkoordinater i ett allmänt flygfotofall påminner om motsvarande formler i normalfallet, men som bildkoordinater används de roterade bildkoordinaterna $(x_1 y_1 z_1)$ och $(x_2 y_2 z_2)$.

Resultatet av beräkningen är en uppsättning modellkoordinater $(x y z)$ för alla de detaljer i bilderna, som mätts för att de avses ingå i en kartdatabas. Detta kallas en numerisk stereomodell (till skillnad mot den optiska stereomodell, som kunde rekonstrueras i spegelstereoskopet och i de gamla analoga stereoinstrumenten). Observera dock, att denna modell än så länge ”svävar fritt”. Den har ju sitt origo i vänster projektionscentrum O_1 , den är inte horisonterad, dvs. vattenytan kan luta, och den är inte skalbestämd. Däremot har den rätt form, jämfört med landskapet, och en enhetlig (men ännu okänd) modellskala.

Absolut orientering

Fullständig orientering av två bilder till en stereomodell fordrar tolv yttre orienteringselement. Fem av dem bestämdes i den relativa orienteringen. Sju orienteringselement återstår, och de bestäms genom absolut orientering (eller genom blocktriangulering, se 14.2.4).

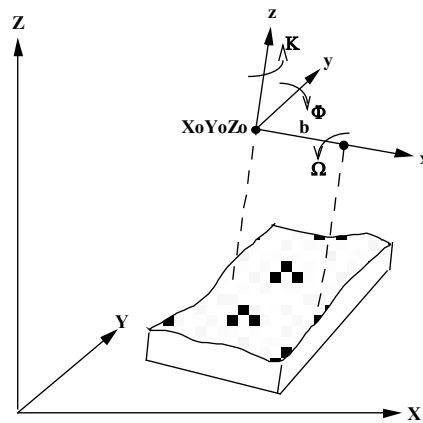
Absolut orientering innebär att den numeriska stereomodellen skalbestäms, horisonteras och inpassas i markkoordinatsystemet. Modellkoordinaterna ska alltså transformeras till markkoordinater. Transformationen styrs av sju element, dvs. sju transformationsparametrar. Elementen (se Figur 13.12) utgörs av:

- modellens *läge* i markkoordinatsystemet. Läget definieras av de tre markkoordinaterna $(X_O Y_O Z_O)$ för modellsystemets origo O_1 , dvs. för vänster projektionscentrum,
- modellens *axelriktningar* i detta system. Axelriktningarna definieras av tre vinklar $(\Omega \Phi K)$ mellan modellkoordinatsystemets axlar $(x y z)$ och det yttre markkoordinatsystemets $(X Y Z)$. (På motsvarande sätt definierades den enskilda bildens rotationsvinklar $(\omega \phi \kappa)$, se yttre orientering.), och
- modellens *skala*. Skalan definieras av en skalfaktor (m) . Att skalfaktorn (m) är beroende av basens längd (b) , konstaterade vi redan i avsnittet om normalfallet.

För att lösa sju okända transformationsparametrar (dvs. orienteringselement) erfordras ett ekvationssystem om minst sju ekvationer. Dessa kan ställas upp med utnyttjande av ett antal stödpunkter, som inmätts geodetiskt och därigenom erhållit kända markkoordinater $(X Y Z)$. Stödpunkternas bildkoordinater mäts och därur beräknas deras modellkoordinater $(x y z)$. Därefter kan ett ekvationssystem med ekvationer av typ

$$(X Y Z) = f(x y z)$$

ställas upp och lösas med avseende på transformationsparametrarna i f .



Figur 13.12. Absolutorientering av en stereomodell. Koordinataxlar och orienteringselement är angivna. (Skalfaktorn representeras av basen b .)

Funktionen f utgör en tredimensionell likformig (Helmert-) transformation av modellkoordinatsystemet $(x \ y \ z)$ till markkoordinatsystemet $(X \ Y \ Z)$, se avsnitt 5.6. I matrisform skrivs transformationen

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + m R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(Javisst liknar formeln kolinearitetsekvationerna i avsnitt 13.3, men här är det modellkoordinater som transformeras!) R utgör modellens rotationsmatris, vars nio rotationselement är trigonometriska funktioner av modellens rotationsvinklar (betecknade med stora $(\Omega \ \Phi \ K)$ för att skilja dem från bildens rotationsvinklar). Eftersom rotationsmatrisen är olinjär, serieutvecklas ekvationssystemet kring närmevärden på orienteringselementen. Dessa erhålls ur det integrerade navigationssystemet i flygplanet och på kameran.

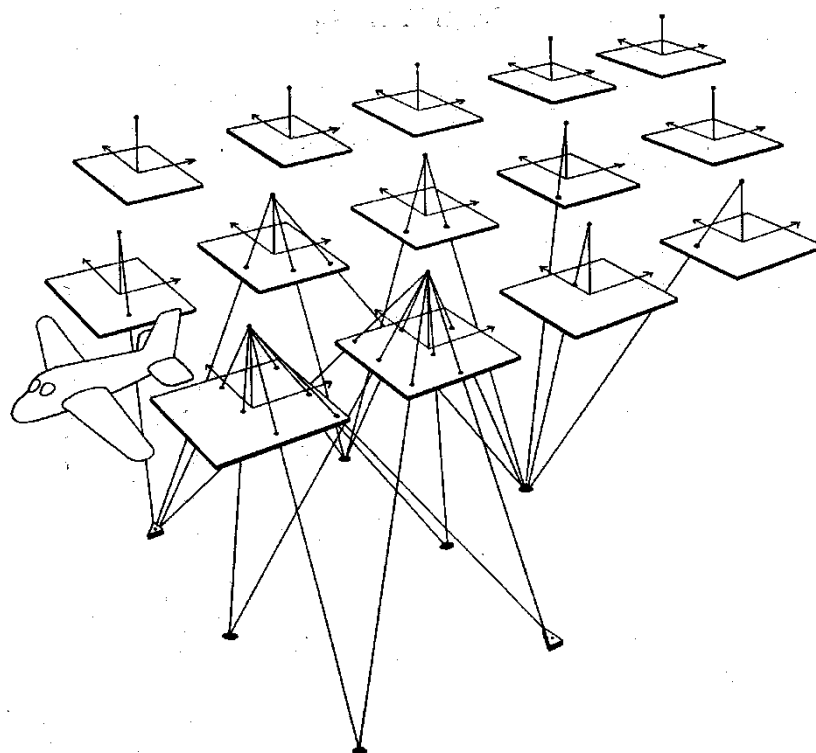
Stödpunkterna kan vara naturliga, väldefinierade detaljer eller så signaleras de med vita skivor för att synas och bli mätbara i flygbilderna. För att bestämma de sju okända orienteringselementen (parametrarna) erfordras minst två stödpunkter i plan och tre i höjd, vilkas $2 \times 2 = 4$ respektive $3 \times 1 = 3$ koordinatvärden ger sju ekvationer i ekvationssystemet. Normalt utnyttjas betydligt fler stödpunkter, som ger fler ekvationer. Det sålunda överbestämda ekvationssystemet löses genom utjämning med minsta kvadratmetoden.

När parametrarna är kända, kan modellkoordinaterna $(x \ y \ z)$ för samtliga mätta objektpunkter omräknas till objektkoordinater $(X \ Y \ Z)$ i markkoordinatsystemet. Resultatet av absolutorienteringen är alltså en uppsättning transformationsparametrar, med vilka samtliga modellkoordinater kan transformeras till markkoordinater. Dessa kan lagras i en (kart)databas. Därmed har den fotogrammetriska mätprocessen fullbordats.

13.2.4 Blocktriangulering

I praktiska tillämpningar har relativ och absolut orientering av enskilda stereomodeller ersatts av blocktriangulering. Förenklat kan blocktriangulering ses som en kombinerad relativ och absolut orientering av många modeller samtidigt.

Kartdatainsamling över större områden utförs genom successiv fotogrammetrisk mätning i många stereomodeller i flera bildstråk. Området har då flygfotograferats med stereoövertäckning i ett antal parallella flygstråk, se Figur 13.13 och 15.2. Absolutorientering av varje enskild stereomodell i ett sådant s.k. *block* av bilder skulle kräva ett stort antal stödpunkter med kända markkoordinater. Ett alternativ till detta är, att varje bild i blocket kan ges känd yttre orientering. Då kan orienterade stereomodeller lätt skapas ur parvisa bilder. *Blocktriangulering* är en teknik att beräkna de enskilda bildernas yttre orientering utifrån ett begränsat antal kända stödpunkter.



Figur 13.13. Blocktriangulering som strålkärveutjämning. Trianglar symboliserar de få kända stödpunkterna, övriga är konnektionspunkter. (Källa: Torlegård)

I en första fotogrammetrisk operation orienteras bilderna parvis i en digital arbetsstation med hjälp av inre och relativ orientering, och bildkoordinater mäts för de få stödpunkterna. Stödpunkterna kan utgöras av naturliga, väldefinierade detaljer eller vid behov signaleras för att synas i flygbilderna. Planering av stödpunkter behandlas i avsnitt 15.1 nedan. Dessutom mäts ett stort antal s.k. konnektionspunkter. Konnektionspunkterna utgörs av tydliga terrängdetaljer, som väljs så, att de blir gemensamma för flera angränsande bilder. På grund av övertäckningen inom och mellan stråk kan stöd- och konnektionspunkter ses och mätas i mellan två och sex bilder vardera, se Figur 13.13. Konnektionspunkterna utnyttjas för att bättre ”knyta ihop” bilderna vid blockutjämningen, den matematisk-statistiska beräkningen av bildernas yttre orientering. Bildmätningarna sparas i form av bildkoordinater.

Kolinearitetsekvationer i fotograferingsfallet (se avsnitt 13.3) kan nu formuleras för varje enskild bildstråle från samtliga stöd- och konnektionspunkter till motsvarande bildpunkter i samtliga bilder. För vissa bildstrålar är således markkoordinater ($X Y Z$) kända. De flesta bildstrålar härrör dock från okända konnektionspunkter, som saknar kända markkoordinater. Konnektionspunkter kan sökas och mätas automatiskt med digital bildmatchning, se avsnitt 14.2 nedan. Därigenom kan ett mycket stort antal av dem ge ett överbestämt och matematiskt stabilt ekvationssystem.

Flygplanets och kamerans integrerade navigationssystem (se avsnitt 13.3) ger värden på bildernas yttre orienteringselement, dvs. projektiionscentrums läge ($X_o Y_o Z_o$) och kameraaxelns riktning ($\omega \phi \kappa$) vid varje exponering. Dessa värden är inte tillräckligt noggranna för att användas för yttre orienteringen, och ingår därför som närmevärden i alla kolinearitetskvationer.

Hela ekvationssystemet, bestående av alla dessa kolinearitetskvationer, blir mycket stort. Det är olinjärt på grund av rotationsmatriserna och måste därför lineariseras runt närmevärdena. Det löses med minsta kvadratmetoden i en s.k. blockutjämning och ger därvid yttre orienteringselement ($X_o Y_o Z_o \omega \phi \kappa$) med hög noggrannhet för samtliga bilder som ingår i blocket. (Dessutom erhålls markkoordinater ($X Y Z$) för samtliga konnektionspunkter, men de sparas normalt inte.)

Resultatet av blockutjämningen är alltså noggranna yttre orienteringsdata för samtliga bilder i blocket. Med hjälp av dessa orienteringsdata kan bilderna inför den efterföljande kartframställningen parvis direkt orienteras till stereomodeller utan att relativ eller absolut orientering behöver utföras. Bilderna med sina orienteringsdata hämtas upp ur databasen, varvid stereomodellen orienteras automatiskt.

Den stora överbestämningen av ekvationssystemet medger, att även de inre orienteringsparametrarna kan betraktas som okända och ingå i beräkningen som närmevärden. Blockutjämningen ger då förbättrade värden på kamerans kalibrering, s.k. självkalibrering.

Blocktriangulering är en del av den fotogrammetriska kartdatainsamlingen, som kommer att behandlas i kapitel 15. Där kommer även behovet av stödpunkter att behandlas. Tekniken används även för icke-topografiska ändamål, vilket berörs i avsnitt 14.4.

13.2.5 Digital fotogrammetri

Princip

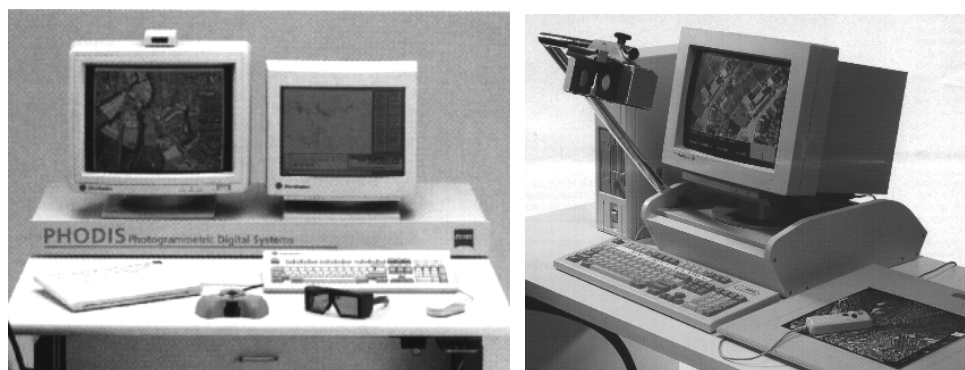
Med digital fotogrammetri avses att de analytiska principerna tillämpas på digitala bilder. Digital fotogrammetri utförs helt och hållet i dator (dvs. utan de klassiska stereoinstrumenten) och är i dag allena rådande fotogrammetrisk teknik. Tekniken medger att vissa moment automatiseras. Viss fotogrammetrisk stereomätning kan således utföras automatiskt med digital bildmatchning.

Digitala bilder och anskaffning av sådana avhandlades i kapitel 12. En av den digitala bildens fördelar är, att den kan behandlas interaktivt, dvs. i realtid, för att ge bättre läsbarhet på datorskärmen eller för att kunna extrahera intressant information. Därvid tillämpas metoder för digital bildbehandling, t.ex. kontraststräckning, filtrering av brus, detektering av kanter och segmentering av bilden i homogena områden.

Digital fotogrammetrisk mätning

Digital fotogrammetrisk mätning utförs med hjälp av dator, antingen en PC eller en grafisk arbetsstation, med stora bildminnen, snabb processor och stereoskopisk bildpresentation på skärm. Man talar om digital fotogrammetrisk arbetsstation (Figur 13.14). Mätning görs med pekdon (mus), som styr en markör på skärmen eller flyttar bilderna i förhållande till en stationär markör. Markören utgör mätmärke.

Kapitel 13: Fotogrammetriska metoder

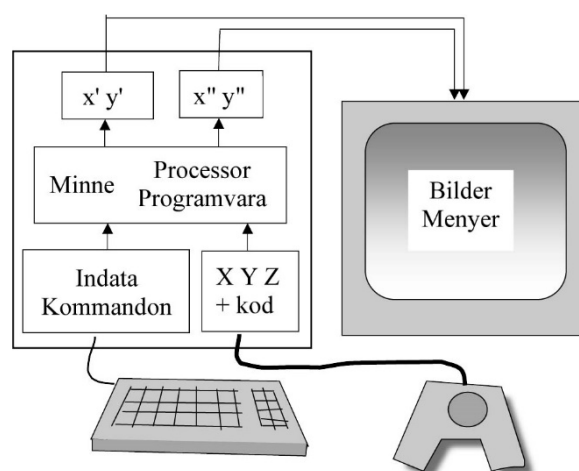


Figur 13.14. Fotogrammetriska arbetsstationer Zeiss Phodis ST resp. Leica DVP. Stereoseende åstadkoms här med "blinkmetoden" respektive med stereoskop och delad skärm.

Separation av bilderna för att erhålla stereoseende kan åstadkommas med olika metoder (separata skärmar, anaglyfmetoden, polarisation, "blinkmetoden", eller lentikulär skärm), se avsnitt 13.2.

När blocktriangulering genomförts, lagras de yttre orienteringsparametrarna för alla bilder i arbetsstationens datafiler. Operatören hämtar upp aktuellt bildpar och tillhörande geometrifil, som innehåller orienteringsparametrarna, varvid relativ och absolut orientering av bildparet utförs momentant.

Bildmätning i arbetsstation kan sägas fungera "bakvänt", se Figur 13.15. Operatören genererar hela tiden objektkoordinater med den handhållna markören. Ur dessa beräknas hela tiden bildkoordinater med kolinarietsformlerna i det s.k. fotograferingsfallet (se avsnitt 12.3). Dessa bildkoordinater "hämtar" kontinuerligt motsvarande bilddata ur bildminnet, så skärmen visar stereoskopiska bildutsnitt, som omger det läge, som anges av de beräknade bildkoordinaterna. När operatören placerat mätmärket på den bilddetalj, som han avser mäta, kan han trycka på registreringsknappen, varvid de aktuella objektkoordinaterna lagras. Beräkningarna och styrningen går så snabbt, att operatören tycker sig direkt styra mätningen. Därigenom kan en kontinuerligt orienterad stereomodell betraktas och mätas på skärmen.

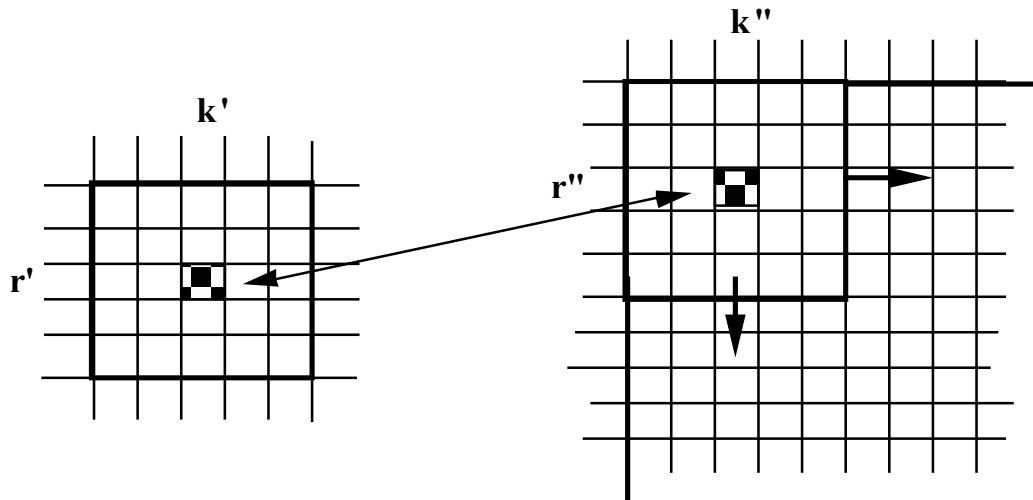


Figur 13.15. Principen för en fotogrammetrisk arbetsstation.

Manuell mätning med datorstöd används vid stödpunktsmätning vid blocktriangulering, och vid kartdatainsamling. Vid kartdatainsamling kan befintliga vektordata, t.ex. äldre kartdata, och nymätta data överlagras skärmbilden. Operatören ser då tydligt vad som skall revideras och vad som har mätts.

Digital bildmatchning

Digital bildkoordinat- och parallaxmätning kan emellertid även utföras automatiskt, dvs. utan operatör. Tekniken kallas *digital bildmatchning*. Därvid beräknas maximal korrelation (likhet) mellan ett litet *målfönster* (t , eng. target window) i den ena bilden, och ett motsvarande fönster ur den andra bilden, se Figur 13.16. Målfönstret (t) får stegvis, delyta för delyta, avsöka en större *sökyta* (s , eng. search space) i den andra bilden. Ett likhetsmått beräknas mellan bildmönstret i målfönstret och bildmönstret i motsvarande fönster ur sökytan. När största likhet uppnåtts, har det fönster ur sökytan återfunnits, som stereoskopiskt motsvarar målfönstret.



Figur 13.16. Principen för digital bildmatchning. Målfönstret (t) till vänster jämförs pixel för pixel med motsvarande utsnitt ur den större sökytan (s) till höger. Given respektive sökt bildpunkt är skrafferad. Rader i bildmatrisen betecknas r , kolumner betecknas k .

Fönstrens centrala bildpunkter motsvarar då samma objektpunkt. Dessa bildpunkter utgör de s.k. *homologa punkterna* med läget $(r' k')$ resp. $(r'' k')$ i de två bilderna. (Jämför punkterna P_1 resp. P_2 i Figur 13.9!). Deras motsvarande bildkoordinater $(x' y')$ resp. $(x'' y')$ beräknas med hjälp av pixelläget $(r, k)_H$ för bildhuvudpunkten. Motsvarande modell- och objektkoordinatvärde kan därefter beräknas med hjälp av de analytiska sambanden tidigare i detta avsnitt.

Målfönstret kan vara storleksordningen 30x30 bildpunkter stort, medan sökytan i princip utgörs av hela den andra bilden. För att spara söktid reduceras dock sökytan med hjälp av kännedom om, var den sökta bildpunkten förväntas ligga. Ofta utnyttjas skärningslinjen mellan bildplanet och det s.k. epipolarplanet, dvs. planet $O1O2P$ i Figur 13.11b (se även Figur 13.8), som sök område.

Som likhetsmått mellan fönstren används statistisk korskorrelation eller minsta kvadratmetoden.

Vid korrelationsmatchning anger maximal korrelationskoefficient läget för de homologa punkterna. Noggrannheten kan ökas till en andel av pixelstorleken (s.k. subpixel-noggrannhet), om läget $(r'' k')$ interpoleras ur lägena för de högsta korrelationsvärdena.

Vid *minsta-kvadratmetods-matchning* (MK-matchning) minimeras i stället gråtonskillnaderna mellan målfönstret och fönstret i sökytan enligt minsta kvadratmetoden. MK-matchning fordrar goda närmevärden, så förflyttningarna i sökytan blir små. Närmevärdena kan erhållas med hjälp av en föregående korrelationsmatchning. Metoden har i stället högre noggrannhet, 1/20 pixel vid goda bildkontraster.

Ett alternativ till matchning av förvalda punkter eller punkter i regelbundna rutnät är att

Kapitel 13: Fotogrammetriska metoder

söka upp bilddetaljer med goda egenskaper för matchning, och sedan matcha dessa. Man söker t.ex. markerade kanter eller tydliga detaljer (eng. interest points) med hjälp av en särskild bildbehandlingsrutin. Då talar man om *egenskapsmatchning*.

Vissa fotogrammetriska mätmoment kan automatiseras med digital bildmatchning. Tekniken kan tillämpas

- vid mätning av y-parallaxer vid relativorientering, i de sex von Gruber-lägena. I praktiken matchas ett stort antal punkter med egenskapsmatchning,
- vid mätning av ett stort antal konnektionspunkter vid blocktriangulering, också med egenskapsmatchning, och
- vid mätning av ett nät av markpunkter för att skapa en digital höjdmodell (kommer att behandlas i avsnitt 14.2).

Mätosäkerheten kan t.o.m. vara lägre än vid manuell mätning.

Relativ orientering kan alltså genomföras i princip utan medverkan av operatör, liksom delar av blocktriangulering, generering av digitalt ortofoto och mätning av digitala höjdmodeller. Vid mätning av digitala höjdmodeller stegar datorn fram i ett förvalt rutnät, eller så söks tydliga punkter upp och matchas med egenskapsmatchning i ett oregelbundet punktnät.

Digitala fotogrammetriska arbetsstationer är spridda inte bara till kartproducenter utan även till kartdataanvändare, t.ex. kommunala kartmyndigheter och skogsbolag. Kartdatainsamling och revidering kommer att behandlas i avsnitt 14.1.

Forskning och utveckling inom digital fotogrammetri går mot allt högre grad av automatisering med hjälp av digital bildbehandling, s.k. datorseende. Metoder utvecklas sålunda för automatisk mätning av exempelvis byggnader genom extrahering av kanter och hörn. Hörnen mäts in med digital matchning ur flera bilder och byggnadskroppens form rekonstrueras tredimensionellt, yta för yta. Digitala höjdmodeller har visats kunna mätas på pixelnivå med digital matchning (s.k. semi-global matching), dvs. höjdvärdena kan beräknas och redovisas pixel för pixel. Med denna nya form av digital bildmatchning kan varje bildelement få ett eget höjdvärde i den digitala höjdmodellen. Därigenom skulle interpolationsmomentet i höjdmodellen bortfalla vid framställning av ortofoton eller 3D-visualisering. En ytterligare förbättring av matchningsnoggrannheten kan erhållas med samtidig matchning av alla bildpar, som innehåller de homologa punkterna.

Den digitala fotogrammetrin integreras alltmer med geografiska informationssystem (GIS). En utveckling pågår från digital karta till visualisering med digitala stads- och landskapsmodeller.

13.2.6 Instrument för mätning i fotografiska bilder

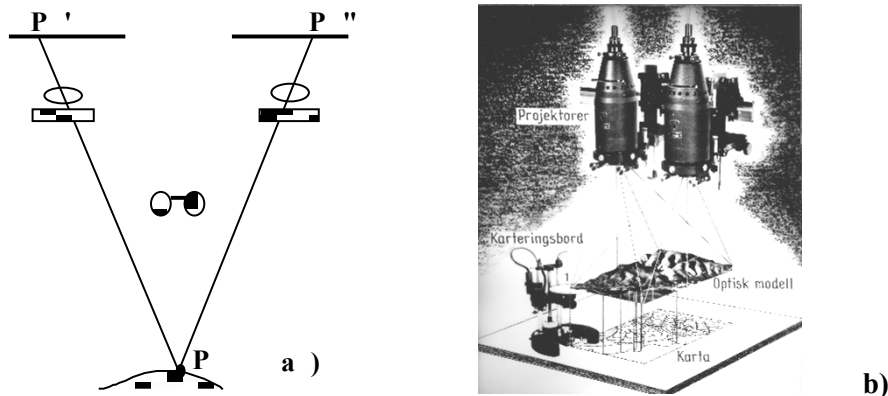
I och med att de digitala kamerornas kvalitet och effektivitet gjort, att de fotografiska kamerorna försvunnit från marknaden, så har också de analoga och analytiska stereoinstrumenten försvunnit. Här ska de bara kort behandlas, och då av rent pedagogiska skäl. Den analytiska teorin med vektorer och rotationsmatriser kan i analoga instrument åskådliggöras med ljusstrålar och mekanisk vridning av projektorerna.

Stereokomparatorn har under mer än ett sekel använts för manuell punktvis bildmätning med mycket hög noggrannhet (mätosäkerhet ca 1 μm). Ett mätmärke i vardera

bilden placeras under stereoseende på den bilddetalj, som ska mätas in. Koordinater i komparatorns koordinatsystem registreras till dator via digitala givare och transformeras analytiskt till bildkoordinater. Det *analytiska stereoinstrumentet*, som utvecklades med datatekniken på 1970-talet, var i princip en datorstödd stereokomparator med återkoppling från datorn via servomotorer till komparatorns bildvagnar. Bild- och modellorientering och mätning genomfördes även här med analytiska metoder på samma sätt som i digital arbetsstation. Instrumentet förlorade sin betydelse med den digitala bildens inträde.

Analogi betyder inbördes likhet. För att kringgå de tidsödande beräkningar för hand, som stereokomparatorn medförde, utvecklades tidigt (1909!) *analog stereoinstrument*. I dessa återskapades optiskt eller mekaniskt flygfotograferingssituationen inklusive en modell av det avbildade landskapet. Kartering och andra mätningar utfördes direkt i denna stereomodell. För att återskapa modellen bringades bilderna i samma fysiska läge relativt varandra som de hade vid fotograferingstillfället. Instrumentens projektorer kunde roteras och förskjutas för relativ och absolut orientering av strålkärvarna. När man projicerade motsvarande bilddetalj i vänster och höger bild via sina resp. projektionscentra, erhöles parvisa strålar, som skar varandra. Strålarnas skärningspunkter kunde fångas upp och utgjorde modellpunkter, som gemensamt skapade modellytan. Avancerade analoga stereoinstrument användes fram till 1980-talet.

Balplex Plotter är ett enkelt analogt stereoinstrument med optisk projektion (Figur 13.17), som ger en synlig, optisk stereomodell projicerad på en yta. Stereoseende åstadkoms med anaglyfprincipen, dvs. genom att med färgade filter och glasögon separera vänster och höger strålgång. Mätmärket är en lysande punkt P på en rörlig mätvagn. Kartering sker i modellens skala på projektionsbordet med ett ritstift på mätvagnen. På grund av instrumentets överskådlighet används det för undervisning.



Figur 13.17. Analogt instrument med optisk projektion. a) Princip. Stereoseende med anaglyfprincipen (färgfilter). Ett mätmarke i modellytan. b) Balplex Plotter (egentligen den tyska föregångaren Multiplex)

Den inre orienteringen rekonstrueras genom att bilderna centreras på bildhållare med bildhuvudpunkten på kamerakonstantens avstånd från projektionscentrum. Relativ orientering genomförs i form av fysisk rotation av projektorerna tills fem olika strålpär (se Figur 13.11) skar varandra utan vertikal-(y-)parallaxer. Det resulterar i en optisk modell av terrängen, vilken kan betraktas i stereo. Vid absolut orientering hanteras

modellen och de två projektorerna som en enhet (jämför Figur 13.12). Önskad modellskala justeras mekaniskt med basens längd b som $m = b_f / b$ (jämför parallaxformlerna i normalfallet!). Därtill erfordras två stödpunkter i plan (XY), så att ett avstånd kan mätas. För horisontering krävs minst tre höjdstöd (Z), dvs. stödpunkter med kända höjdvärden. Ur dessa beräknas modellens lutning, som justeras mekaniskt. Slutligen inpassas modellen i plan på de två planstödpunkterna och i höjd genom att ställa mätmärket på en höjdstödpunkt och ställa in stödpunktens höjdvärde på ett höjdräkneverk.

Resultatet är en modell, som är likformig med objektet (landskapet) och i känd skala. Mätning- eller karteringsarbetet kan därefter påbörjas.

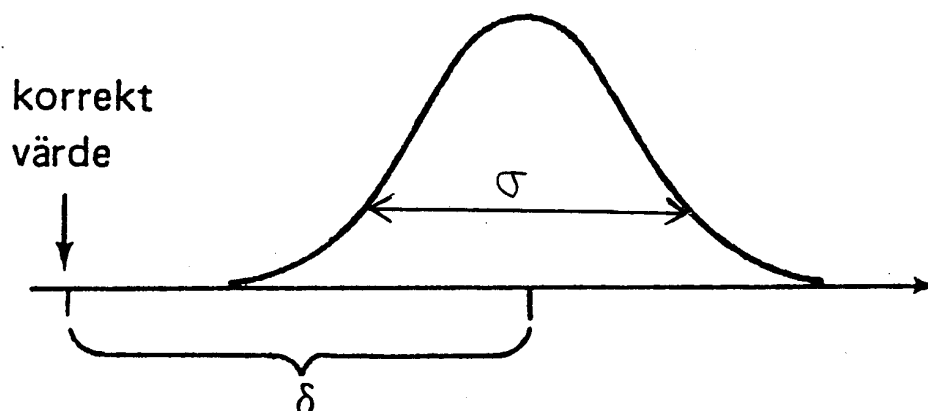
13.3 Fotogrammetrisk mätosäkerhet

13.3.1 Kvalitetsbegrepp

Att ha kontroll över mätningars kvalitet är av stor ekonomisk betydelse. Genom att planera och genomföra mätning så, att önskad kvalitet, varken mer eller mindre, uppnås, minimeras mätningens kostnaden. Mätningens resultat måste alltid åtföljas av en specifikation av dess kvalitet.

Kvalitet i vid bemärkelse omfattar *fullständighet* (att allt finns med), *riktighet* (t.ex. att det är rätt tolkat och kodat) och *noggrannhet* (dvs. rätt läge). Noggrannhet kan i sin tur uttryckas som *tillförlitlighet* (frihet från grova fel), som *modellriktighet* (frihet från systematiska avvikelser) och som *mätosäkerhet* (omfattningen av tillfälliga avvikelser). Se Figur 13.8.

De systematiska avvikelserna kan beskrivas matematiskt och därmed korrigeras. Det enklaste fallet av systematiska avvikelser är en konstant avvikelse. Ett enstaka mätvärde (långt) utanför de tillfälliga avvikelsernas fördelningskurva betecknas som ett *grovt fel*. Resterande (små) avvikelser utgör de *tillfälliga avvikelserna* och kan uppskattas statistiskt som *standardosäkerhet*.



Figur 13.18. Fördelningskurva som visar mätresultatens spridning kring ett medelvärde. Spridningen beror på tillfälliga avvikelser och mäts som standardosäkerhet (σ). Figuren illustrerar även begreppet systematisk avvikelse (δ).

Mätningar måste utföras med tillräcklig grad av överbestämning. Därigenom ges möjlighet att

- isolera grova fel,

- konstatera systematiska avvikelser och korrigerar dem genom en lämplig analytisk (matematisk) modell, och
- utjämna de tillfälliga avvikelserna och erhålla ett mått på mätosäkerheten.

Mätosäkerhet uppträder i alla led i den fotogrammetriska mätprocessen. Vissa tillfälliga avvikelser i ett led kan i efterföljande led ge upphov till systematiska avvikelser, som påverkar hela stereomodellens geometri. Exempelvis kan en dålig inre eller relativ orientering medföra systematiska deformationer av stereomodellen.

Här ska endast en förenklad bild ges av den samlade effekten av källorna till avvikelser i den flygfotogrammetriska mätprocessen. Inledningsvis härleds uttryck för mätosäkerhet i plan och höjd utifrån parallaxformlerna i normalfallet. Markfotogrammetrins mätosäkerhet kommer att behandlas i avsnitt 14.4.4.

13.3.2 Normalfallets mätosäkerhet

Mätosäkerheten i de modellkoordinater $(x \ y \ z)$, som bestämts med parallaxformlerna i normalfallet, kan härledas utifrån mätosäkerheten s i de mätta bildkoordinaterna $(x' \ y' \ x'' \ y'')$. Den senare mätosäkerheten kan bedömas utifrån aktuell flygkamera, CCD-sensor, flyghöjd och mätprogramvara. Visserligen är normalfallet bara approximativt uppfyllt i praktisk flygfotogrammetri, men som underlag för uppskattning av mätningarnas kvalitet duger det.

Ett centralt begrepp när man bedömer fotogrammetrins mätosäkerhet är *bas/höjdförhållandet* b/h , dvs. förhållandet mellan flygfotograferingsbasens längd och flyghöjden. För några vanliga digitala flygkameror och 60 % bildövertäckning finns förhållandet angivet i tabell 13.1.

Parallaxformlerna kan enligt ovan skrivas

$$x = x' \frac{z}{-c} \quad y = y' \frac{z}{-c} \quad z = -c \frac{b}{p_x}$$

Derivering av dem med avseende på x' , y' resp. p_x (med substitution $dx = s_x$, $dy = s_y$, $dz = s_z$ och $dp_x = s_p$) ger standardosäkerheterna (egentligen absolutbeloppen)

$$s_x = s_x' \frac{z}{-c} \quad s_y = s_y' \frac{z}{-c} \quad s_z = s_p \frac{cb}{p_x^2}$$

Men eftersom

$-z \approx h$ (modellens negativa z-koordinater motsvaras av flyghöjden) och

$$\frac{-z}{c} = \frac{h}{c} = m \quad \text{är lika med bildskalfaktorn,}$$

så gäller efter substitutioner

$$s_x = m s_x' \quad \text{och} \quad s_y = m s_y'$$

Vi kan förutsätta att $s_{y'} = s_{x'}$.

För standardosäkerheten i plan gäller därför

Kapitel 13: Fotogrammetriska metoder

$$s_{xy} = m \cdot s_{x'} \sqrt{2}$$

För standardosäkerheten i höjd gäller

$$p_x = \frac{-c b}{z} \text{ (ur parallaxformeln),}$$

dvs.

$$s_z = s_p \frac{z^2}{c b} = s_p \frac{z}{c} \frac{z}{b} = s_p m \frac{z}{b}$$

Dessutom gäller att

$$\frac{b}{-z} = b/h \text{ är bas/höjdförhållandet.}$$

Således kan standardosäkerheten i z skrivas

$$s_z = s_p \frac{m}{b/h}$$

Parallaxen $p_x = x' - x''$ bestäms i princip ur två bildkoordinatmätningar, men mäts i praktiken i ett moment, en stereoskopisk placering av mätmärket på upplevt höjdvärde i objektet. Parallaxmätningen bör därför kunna betraktas som en bildkoordinatmätning, dvs.

$$s_p = s_{x'}$$

Standardosäkerheten i plan och höjd kan därför slutligen skrivas

$$s_{xy} = m s_{x'} \sqrt{2}$$

$$s_z = m s_{x'} 1 / (b/h)$$

Mätosäkerheten i plan (s_{xy}) är således lika med mätosäkerheten i bildkoordinaterna ($s_{x'}$, $s_{y'}$) ”uppförstorade” med bildskalfaktorn (m) (och med $\sqrt{2}$ enligt Pythagoras' sats), medan mätosäkerheten i höjd (s_z) dessutom är omvänt proportionell mot bas/höjdförhållandet (b/h). Det senare kan vid 60 % övertäckning och typisk digital kamera beräknas till $b/h \approx 0,3$ (se tabell 13.1), vilket antyder att mätosäkerheten i höjd teoretiskt sett är drygt dubbelt så stor som i plan, ty

$$s_z / s_{xy} = (1 / b/h) / \sqrt{2} = 1 / (0,3 \times 1,4) = 2,4.$$

Som framgår nedan, är skillnaden i praktiken något mindre.

Man kan uttrycka samma sak så här: Mätosäkerheten i såväl plan som höjd är direkt proportionellt mot flyghöjden. Mätosäkerheten i höjd är dessutom omvänt proportionellt mot bas/höjdförhållandet. Det blir därigenom proportionellt mot kvadraten på flyghöjden! Kravet på noggrannhet i höjd sätter därför ofta gränsen för maximal flyghöjd.

Digital fotogrammetri ger goda möjligheter till modellering och korrektion av systematiska avvikelser och möjligheter till överbestämda mätningar. Standardosäkerheten i mätta bildkoordinater ($s_{x'}$, $s_{y'}$) ligger i digitala arbetsstationer på pixelnivå vid manuell mätning, på delar av pixeln vid bildmatchning.

13.3.3 Övriga felkällor. Tumregler

Den teoretiska fortplantningen av mätosäkerhet ovan beskriver emellertid bara den ursprungliga mätosäkerhetens inverkan. Till detta kommer bidrag från signalering, bilder, inmätning av stöd- och konnektionspunkter, blocktriangulering, bild- och modellorientering m.m. Vid planering av fotogrammetrisk kartdatainsamling har man länge utgått från rekommendationerna i Handbok i mät- och kartfrågor (HMK). Tas hänsyn även till dessa källor, erhålls större mätosäkerhet, och relationen mellan mätosäkerhet i höjd och plan blir i praktiken inte så stor. Den förväntade mätosäkerhet som tabellerats i gamla HMK-Fotogrammetri (HMK-Fo) för olika flyghöjder är tyvärr inte tillämplig på digitala flygkameror. Ur en hittills begränsad erfarenhet kan man utgå från, att

*den fotogrammetriska mätosäkerheten i plan motsvarar
bildelementets storlek, förstörad med aktuell bildskalfaktor.
Mätosäkerheten i höjd är ca 1,5 gånger större.*

Detta gäller signalerade eller väldefinierade punkter. I likhet med HMK-Fo kan man förvänta sig högre mätosäkerhet för mindre väldefinierade punkter.

Det är viktigt att beakta riskerna för att även systematiska, dvs. matematiskt modellerbara avvikelser och grova fel uppträder i mätningarna. Exempelvis ger radiell felteckning och atmosfärens refraktion upphov till systematiska avvikelser i stereomodellen. Bristande noggrannhet i relativ och absolut orientering resp. i blocktriangulering, särskilt brister i stödpunktsfördelningen, medför också deformationer av modellen, vilka ger systematiska avvikelser i bildmätningarna. Även

mätobjektet, t.ex. kraftig vegetation i form av gräs- eller buskmark eller åkerfält kan ge upphov till systematiska höjdavvikelser.

Grova fel av typ inställning på fel punkt, felavläsning mm. kan ge upphov till systematiska effekter eller stora motsättningar i överbestämda mätningar. Genom lämplig fördelning av stödpunkterna och genom kontroll av restavvikelser i bild- och modellkoordinater efter varje orienteringsmoment kan systematiska avvikelser och grova fel minimeras.

Fortplantningen av mätosäkerhet i fotogrammetriska processer har studerats ingående. Exempelvis har resultatet av blocktriangulering med olika antal och fördelning av stödpunkter, effekten av att använda integrerade navigationssystem, noggrannheten i kartor (se avsnitt 15.1), i digitala höjdmodeller (kommer att beröras i avsnitt 15.2) och i ortofoton (behandlades i avsnitt 14.1) studerats. Resultatet av detta tillsammans med praktiska erfarenheter ligger till grund för anvisningarna i HMK Bild- och laserdata, som f.n. är under utgivande. För närmare analys av fotogrammetrisk mätosäkerhet hänvisas till litteraturen, i första hand Torlegård (1999). Se litteraturlista.

-----*****-----

Status: Enbart enstaka ändringar gjordes 2021 (ingen revidering)

14 Fotogrammetriska tillämpningar

14.1 Storskalig kartframställning

14.1.1 Primärkartverk och kartprogram

Framställning av digitala kartdatabaser är den volymmässigt största tillämpningen av fotogrammetri. Jämfört med terrester mätning (Kapitel 7) är fotogrammetrin en mycket effektiv metod att framställa kartor över större områden. Här ska planering och praktiskt utförande av sådan mätning behandlas.

Storskalig kartframställning för kommunala ändamål resulterar i s.k. *primär- eller baskartverk*, digitalt lagrade i en databas. Från denna digitala grundinformation kan primär- eller baskartor i skalområdet 1:400 – 1:1 500 framställas. Primärkartverket redovisar förutom topografiska kartobjekt (byggnader, infrastruktur, anläggningar, vegetation, hydrografi, höjdförhållanden) bl.a. fastigheter och tekniska anläggningar, t.ex. ledningar. De karterade objekten representerar stora ekonomiska värden. Kartdata kan också knytas till andra register av olika slag, t.ex. ledningsdata.

Kartdata lagras digitalt, med kodning beroende på objektstyp. Primärkartverket kan därigenom utgöra underlag för framställning av en rad kartprodukter i olika skalor och utföranden. De kan utgöra underlag för fysisk planering och projektering av byggnader, parker och infrastrukturanläggningar, för köp, förvaltning och försäljning av fastigheter, för kommunal detaljplanering, fastighetsbildning och –registrering, för bygglovshandläggning och nybyggnadskartor och för redovisning av t.ex. geotekniska förhållanden. Figur 14.1 visar ett exempel på utskrift av en kommunal primärkarta.

Beställare och nyttjare av dessa typer av kartprodukter är kommuner, verk, myndigheter, entreprenörer och bolag som planerar, bygger och underhåller vår fysiska miljö. Förutom byggnader och anläggningar gäller det infrastrukturen, dvs. vägar, järnvägar, el-, tele-, gas- och bredbandsnät, basstationer för mobiltelefoni m.m.

Kostnaden för att upprätta och underhålla ett storskaligt kartverk är betydande, men bör ställas i relation till de värden som kartan redovisar och den betydelse kartan har för planering. Eftersom kostnaden i hög grad är beroende av kartans kvalitet, bör kvalitetsbehovet noga övervägas vid planering av kartverket. Med kvalitet avses då såväl fullständighet och riktighet som noggrannhet.

Många kommuner har egen mätningsorganisation, som samverkar med kommunala bolag för VA, energi och fjärrvärme, med ledningsdragande verk av typ Vattenfall och Scanova och med Trafikverket. Vissa kommuner har s.k. ramavtal med konsulter om motsvarande tjänster. Ramavtalet sätter som namnet antyder ramar för kommunens upphandling av mätnings- och karttjänster, vilket underlättar den efterföljande upphandlingen av specifika uppdrag.

Som nämnts tidigare har vissa kartanvändare investerat i egna fotogrammetriska arbetsstationer, främst för revidering av sina kartdatabaser. Detta gäller även ett antal kommuner. De flesta kommuner saknar dock fotogrammetriska mätningsresurser. Flygfotografering upphandlas regelmässigt, blocktriangulering, ortofotoframställning och fotogrammetrisk detaljmätning ofta. En stor del av kartframställningen upphandlas sålunda via anbud från konsultföretag. Geodetisk mätning utförs dock ofta i egen regi. Motsvarande typ av upphandling görs av Trafikverket, kraftbolag, IT-bolag, skogsbolag etc.



Figur 14.1. Exempel på kommunal primär- eller baskarta, här återgiven i skala ca 1:2000. (Stockholms stadsbyggnadskontor)

Som underlag för kartarbetet upprättas ett detaljerat *kartprogram*, innehållande

- Område, kartskala, bladindelning
- Kartinnehåll, kvalitetskrav
- Arbetsfördelning mellan egna och upphandlade tjänster
- Stomnät; tillgång och förtätningsbehov
- Signalering och flygfotografering
- Teknikval för stommätning i plan och höjd, för blocktriangulering och för fotogrammetrisk detaljmätning
- Tidplan och ev. etappindelning
- Val av databas, två- eller tredimensionellt lagringsformat
- Datatransferering, karteditering och utskrift.

Det fotogrammetriska uppdraget kan vara kombinerat med ett uppdrag att laserskanna landskapet och skapa en digital höjdmodell. Programmet läggs till grund för anbudsförfrågan och används som underlag för en kostnads kalkyl för projektet. Efter anbudsutvärdering skrivs kontrakt med vald(a) konsult(er). Kontraktet reglerar upphandlingens omfattning, specificerade kostnader, kraven på fältkontroll, kvalitet, leveranstider och format på levererade data, samverkan mellan konsult och upphandlare

Kapitel 14: Fotogrammetriska tillämpningar

samt ev. förseningsklausuler. ABK 09 är en överenskommen samling paragrafer, som reglerar relationen mellan beställare och konsult. I kontrakt avseende upphandling av konsulttjänster refereras regelmässigt till denna.

14.1.2 Den fotogrammetriska kartprocessen

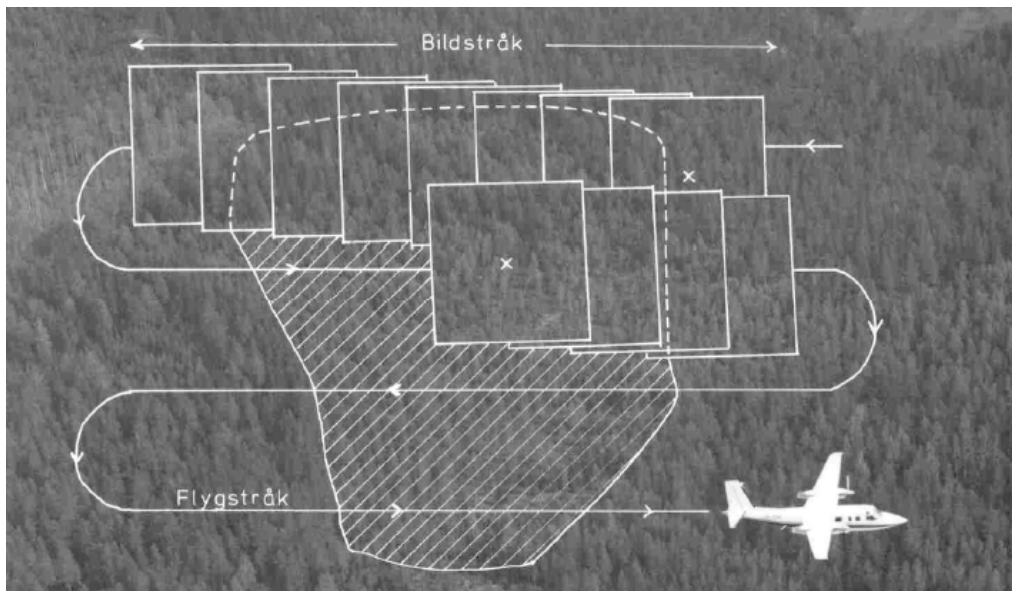
Fotogrammetrisk kartframställning (dvs. fotogrammetrisk mätning för framställning eller revidering av kartdatabas) utförs som en process, vars olika led är beroende av varandra. Tidsmässigt är processen bunden framför allt av flygfotograferingen, som för bästa ljusförhållanden och insyn mot marken bör utföras i perioden mellan snösmältning och lövsprickning. (Perioden efter lövfällning är också tänkbar, men då är skuggorna väl långa.) Undantag är flygfotografering för ortofotoframställning, som ofta görs sommartid, för att vegetationen ska framgå. Den punktvisa förteckningen nedan ger normala tidpunkter för momenten i en process för framställning eller revidering av en kartdatabas med fotogrammetri. Vissa av momenten utvecklas närmare i de därpå följande avsnitten.

År 1 – 2	Hösten – vintern	Planering, kartprogram, upphandling.
År 2	Mars – april	Flygsignalering och inmätning av stödpunkter.
	April – maj	Flygfotografering för kartdatainsamling.
	Maj – augusti	Flygfotografering för ortofoto. Bildinventering. Blocktriangulering. Ev. flygburen laserskanning.
År 2-3	(Ev. etappindelad)	Fotogrammetrisk detaljmätning. Mätning av digital höjdmodell. Ortofotoframställning. Kontroll av kartkvalitet. Geodetisk kartkomplettering. Transferering av kartdata och karteditering.

Stora kartprojekt är ofta indelade i etapper. Flygfotografering och blocktriangulering genomförs i ett sammanhang, ibland i stora samordnade projekt, som täcker flera kommuner, medan den fotogrammetriska detaljmätningen kan utföras etappvis eller upphandlas separat för de ingående kommunerna. Ju längre tid som förflyter mellan flygfotografering och leverans av kartdata, desto större blir emellertid behovet av geodetisk kartkomplettering.

14.1.3 Planering av flygfotografering. HMK

Flygfotografering för mätändamål utförs med övertäckning mellan bilderna, som exponeras utefter raka flygstråk (fotostråk, se Figur 14.2). Även stråken övertäcker varandra. Vid planering av fotogrammetrisk kartdatainsamling har man länge utgått från rekommendationerna i Handbok i mättnings- och kartfrågor (HMK) (senaste versionerna av Fotogrammetri samt Fotogrammetrisk detaljmätning gavs ut 2017, se litteraturlistan; detta år gavs även ut HMK - Ortofoto).



Figur 14.2. Flygfotografering av ett område i flera stråk, med övertäckning mellan bilder och stråk.

För planering och genomförande av fotogrammetrisk kartdatainsamling, bl.a. blocktriangulering och ortofotoframställning, är det ibland av betydelse att exponeringsorterna, dvs. kamerans läge i exponeringsögonblicken, kan förväljlas, t.ex. i förhållande till ett kartbladssystem. Detta är möjligt med GPS-styrning av exponeringen. Att ha samma exponeringsort vid upprepade (omdrevs)fotograferingar ger möjlighet att ha fasta signaler. Vidare kan man återanvända sömlinjer för ortofotomosaiker, vilket annars kan vara problematiskt i stadsmiljöer. Å andra sidan medger digitala kartdatabaser, att flygstråken planeras helt oberoende av kartbladsindelningen.

Val av flyghöjd

Planeringen inleds med val av flyghöjd för flygfotografering. Flyghöjden avgör den möjliga mätnoggrannheten, styr den följande stråkplaneringen och inverkar starkt på projektets ekonomi. Man beräknar därför den flyghöjd som krävs för att uppnå de noggrannhetskrav, som specificerats i kartprogrammet. Erfarenhetsmässigt (se avsnitt 14.3) är mätosäkerheten i *plan* för väldefinierade objekt och måttliga flyghöjder av samma storleksordning som den digitala flygkamerans markupplösning, dvs. bildelementets projicerade storlek på marken. Mätosäkerheten i *höjd* är ca 1,5 gånger högre. Välj alltså flyghöjden h så, att bildupplösningen på marken blir densamma som kravet på mätosäkerhet i plan, eller att 1,5 gånger den motsvarar förväntad mätosäkerhet i höjd. Följande relationer ska alltså uppfyllas, eftersom $m = h/c$ ger bildskalfaktorn:

$$s_{xy} = Pix (h/c) \text{ och/eller } s_h = 1,5 Pix (h/c).$$

Det innebär att

$$h = s_{xy} c / Pix \text{ och/eller } h = s_h c / 1,5 Pix$$

s_{xy} och s_h är kraven på mätosäkerhet i plan resp. höjd. Pixelstorlekar (Pix) för några flygkameror framgår ur Tabell 12.1. Uttryck allt i meter vid beräkningen.

Flyghöjden måste emellertid väljas även med hänsyn till möjligheten att tolka olika kartobjekt i bilderna. Observera dock, att även val av kameratyp samt aktuell vädersituation (främst solstånd och atmosfärsdis) och vegetationen inverkar på

bildernas tolkbarhet. Det slutliga valet av flyghöjd måste tillgodose såväl noggrannhets- som tolkningskriteriet.

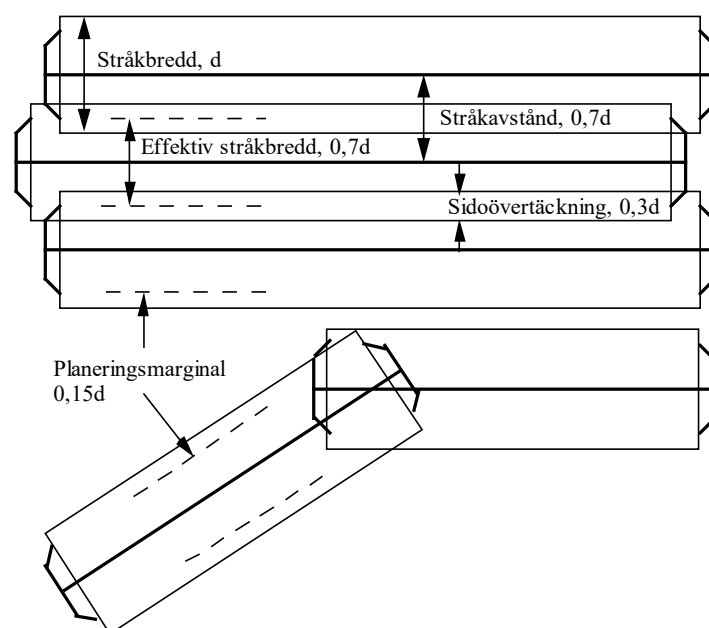
Stråkplanering

Flygfotografering för mätändamål utförs som sagt utefter raka flygstråk (fotostråk) med övertäckning mellan bilderna. Resultatet, de överlappande bilderna, utgör tillsammans ett eller flera *bildstråk*. Hela bildstråket kan utvärderas stereoskopiskt ur parvisa bilder. Stråkplanering utförs med målet att med minsta antal stråk och bilder från given flyghöjd täcka det aktuella området. Nedan ges anvisningar för sådan planering med hänsyn till vald kamera.

För att täcka områden av större bredd än ett stråk planeras parallella stråk, som överlappar varandra. Bilder i flera parallella stråk bildar tillsammans ett *block* av bilder. Normal övertäckning mellan stråk är omkring 30 %, men ibland används mer, ända upp till 60 % av stråkbredden, dvs. bildsidan. Större övertäckning, såväl mellan bilder i stråk som mellan stråk, ger en mer överbestämd blocktriangulering och därigenom noggrannare yttre orienteringsdata, och en noggrannare bildmatchad digital höjdmodell – men flygfotograferingen blir förstås dyrare.

Det är praktiskt att börja med att planera in stråkens lägen i det område, som ska karteras. Den planeringen kan som nämnts göras utan hänsyn till den planerade kartbladsindelningen. Man eftersträvar få och långa stråk, men föredrar om möjligt öst-västliga ur tolkningssynpunkt.

Flygstråken skall tillsammans täcka det aktuella karteringsområdet med en marginal om ca 15 % av stråkbredden från aktuell flyghöjd. Se Figur 14.3. Med stöd av Figur 14.4, men med 30 % sidoövertäckning mellan flygstråken, kan för stråkplaneringen av blocket följande samband härledas avseende stråkets bredd och avståndet mellan stråken:



Figur 14.3. Stråkplaner för kartdatainsamling, dels i ett block av tre parallella stråk, dels i två enkelstråk för infrastrukturprojektering. Flygstråkens ändrar markeras med klamrar.

$$d_1 = d'(h/c) = (d'/c) h$$

$$s_ö = 0,3 d_1$$

$$sa = (d - s\ddot{o}) = 0,7 d_1$$

där

d_1 = bildsida på marken tvärs stråket, dvs. stråkbredd

d' = bildsida tvärs stråket i aktuell kamera

c = kamerakonstant

h = flyghöjd (bestämd utifrån kraven på mätosäkerhet)

$s\ddot{o}$ = sidoövertäckning mellan stråk

sa = stråkavstånd samt effektiv stråkbredd (jfr b i figur 15.4)

Dessa samband används för planering, *inte för fotogrammetriska beräkningar*. Därför kan alla värden avrundas till jämna tal. Exempel på data för några aktuella flygkameror finns i Tabell 12.1 i avsnitt 12.3. Om vi ett ögonblick förutsätter att en flygkamera med 8 cm kamerakonstant och bildformat 11x7 cm används, och att 30 % stråk- och 60 % längsövertäckning planeras, så erhålls vid vald flyghöjd h :

$$d_1 = (d'/c) h = (11/8) h = 1,4 h$$

$$s\ddot{o} = 0,3 d_1 \text{ och}$$

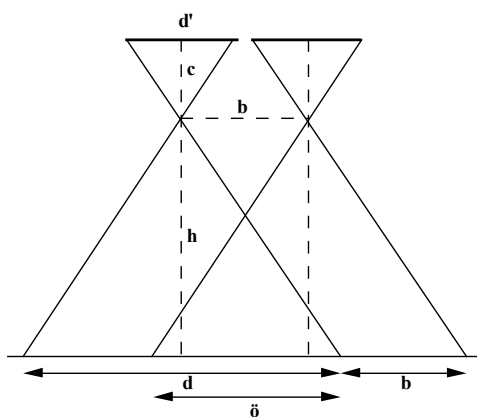
$$sa = 0,7 d_1 = 0,7 \times 1,4 h = h$$

Figur 14.3 illustrerar sambanden och visar, att den effektiva (dvs. för stereokartering användbara) stråkbredden blir lika stor som avståndet mellan flygstråken. Vid planering av enkelstråk över långsträckta objekt, t.ex. järnvägar, vägar, älvar eller kraftledningar, planeras raka stråk med överlappning i stråkändarna och marginaler om 15 % av stråkbredden, som figuren visar.

Planering av de enskilda modellerna

När stråken lagts ut, kan de enskilda modellerna och därur bildcentras lägen planeras utifrån motsvarande samband. Bilderna i ett stråk exponeras med sådana intervall, att de kommer att överlappa varandra med vanligtvis 60 %, ibland 80 %, av bildsidan (se Figur 13.7 och Figur 14.4). Teoretiskt sett skulle 50 % övertäckning räcka för att hela stråket ska bli stereoskopiskt avbildat. Avvikelser i flygfotobasens längd, i flyghöjd, i vridning och lutning av kameran samt radiella höjddeplaceringar medför emellertid risk för bristande stereotäckning i modellskarvarna. Därför används normalt minst 60 % stereoövertäckning.

80 % övertäckning medför att varannan bild övertäcker varandra med 60 %. Det ger möjlighet att välja lämpligaste bilder att ingå i resp. stereopar, där annars bildorienteringen eller mätningen kan bli problematisk, t.ex. över vattenytor.



Figur 14.4. Stereoövertäckning (\ddot{o}) i ett flygbildspar. Övriga beteckningar, se löptexten.

Avståndet mellan exponeringarna i stråken, dvs. mellan parvisa bildcentra, utgör flygfotograferingsbasen b_f . Se Figur 14.4. För planeringen av modellerna inom respektive stråk kan följande samband härledas:

$$d_2 = d'(h/c) = (d'/c)h$$

$$\ddot{o} = 0,6 d_2$$

$$b_f = (d_2 - \ddot{o}) = (d_2 - 0,6 d_2) = 0,4 d_2$$

där

d_2 = bildsida på marken längs stråket

d' = bildsida längs stråket i aktuell kamera

c = kamerakonstant

h = flyghöjd

\ddot{o} = övertäckning, dvs. stereoövertäckt andel av bilden

b_f = flygfotograferingsbas

Med samma antaganden som ovan om vald flygkamera erhålls som funktion av flyghöjden

$$d_2 = d'(h/c) = (d'/c) h = (7/8) h = 0,9 h$$

$$\ddot{o} = 0,6 d_2 = 0,6 \times 0,9 h = 0,54 h$$

$$b_f = 0,4 d_2 = 0,4 \times 0,9 h = 0,36 h$$

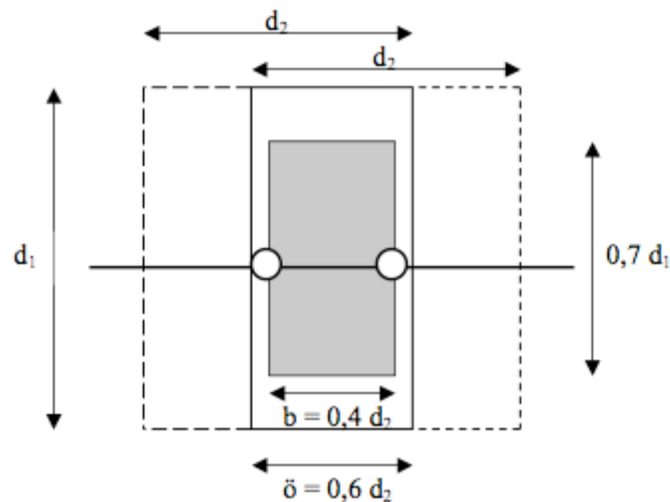
Observera alltså, att bildformatet sällan är kvadratisk. Det är inte säkert, att samma värde på d kan användas för sidoövertäckning och stråkavstånd (d_1), som för längsövertäckning och baslängd (d_2)! Om annan övertäckning, objektiv med annan kamerakonstant eller annat bildformat används, blir de numeriska exemplen annorlunda. Som framgår av avsnitt 12.3 är digitala flygkameror (till skillnad från de fotografiska flygkamerorna) inte alls standardiserade till bildformat eller kamerakonstant.

Nettomodellen

För att underlätta planering av modellernas och stråkens lägen kan den s.k. nettomodellen användas. Hela det stereoövertäckta området i ett bildpar (Figur 15.5) täcker ytan

$$d \times \ddot{o} = d_1 \times 0,6 d_2$$

om övertäckningen är 60 % och om bildformatet är rektangulärt ($d_1 \times d_2$).

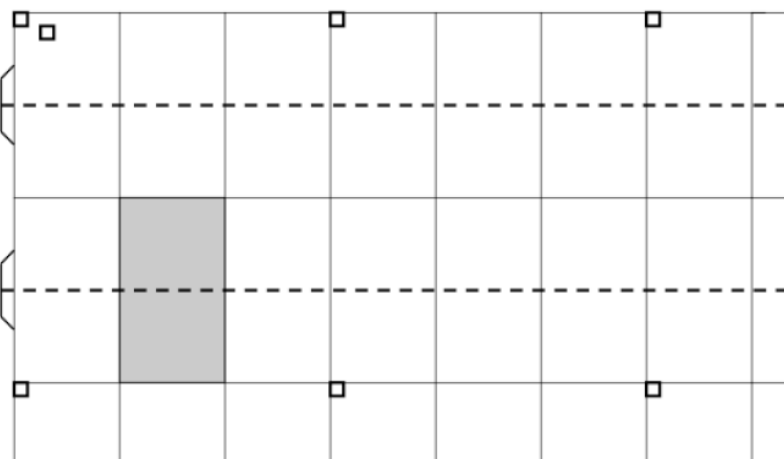


Figur 14.5. Den stereoövertäckta ytan begränsas av heldragen linje, medan nettomodellen är rastrerad. Flygstråkets riktning är markerad, med bildcentra som cirklar, och de två flygbildernas hela utsträckning ($d_1 \times d_2$) i stereoparet har streckats. b = basen, \ddot{o} = övertäckningen.

Med nettomodell avses den del av det stereoövertäckta området, som tvärs stråket är lika med den effektiva stråkbredden och i stråkledd utgör området mellan bildcentra, dvs. basens längd. Se Figur 14.5. Nettomodellen omfattar därför ytan (effektiva stråkbredden \times basen), dvs. vid 30 % sidoövertäckning mellan stråken och 60 % längsövertäckning ytan

$$sa \ x \ b = 0,7 \ d_1 \times 0,4 \ d_2 \text{ om bildformatet är } d_1 \times d_2.$$

Fördelen med nettomodeller är, att de kan planeras kant i kant utan övertäckning. Hela blocket kan då planeras som ett rutnät, där varje ruta är en nettomodell, och där exponeringslägena ligger mitt på skarven mellan varje nettomodell. Se Figur 14.6.



Figur 14.6. Ena (nordvästra) hörnet av ett block. De rektangulära rutorna betecknar nettomodeller. En av dem är rastrerad (jämför Figur 14.5). De streckade linjerna med klamrar anger flygstråkens lägen. Lämplig fördelning av geodetiskt inmätta stödpunkter i plan och höjd vid GPS-stödd blocktriangulering är markerad med små kvadrater.

Sambanden ovan gällde som sagt vid flygfotografering med 60/30 % övertäckning. Används t.ex. 80 % övertäckning och/eller 60 % sidoövertäckning, blir sambanden annorlunda, och nettomodellen får annan storlek.

14.1.4 Planering av stödpunkter

Flygstråkens lägen utgör utgångspunkt för den fortsatta planeringen av

- stödpunkter för blocktriangulering,
- signalering och inmätning av dessa samt
- den stommätning, som kan bli nödvändig för kartframställningen eller för projekteringen.

Genom att blocktrianguleringen (se avsnitt 13.2) ger de yttre orienteringselementen för bilderna, är behovet av stödpunkter och därmed signalering mycket begränsat. I stället erfordras, att ett stort antal konnektionspunkter mäts i alla övertäckningszoner, helst med digital bildmatchning (se avsnitt 13.2). Stödpunkter och konnektionspunkter bör därför förläggas nära nettomodellens kanter för att bli gemensamma för angränsande modeller. Om tydliga objekt, t.ex. taknockar, brunnslock och målade detaljer på vägbanan, väljs som konnektionspunkter kan de, om deras koordinater sparas, vid behov senare användas som naturliga stödpunkter. Därigenom bortfaller även en stor del av det framtida behovet av signalering.

Det integrerade navigationssystemet medför, att goda närmevärden på den yttre orienteringen för varje exponering (dvs. yttre projektionscentrums läge och kameraaxelns riktning) kan beräknas och användas som indata i blocktrianguleringen. Planstödpunkter behövs då i princip bara i blockets hörn, och höjdstödpunkter i kedjor tvärs stråken. Man talar om GPS-stödd blocktriangulering. (Flygs även tvärstråk över de ordinarie stråkens ändar, räcker det i princip med ett plan- och höjdstöd i varje hörn av blocket, dvs. kanske bara fyra stödpunkter!) För säkerhets skull (bl.a. tillförlitligheten, se avsnitt 13.3!) mäts emellertid fler stöd geodetiskt än det teoretiska minimum. Stödpunkter i plan och höjd bör därför spridas jämnt över blocket, särskilt runt dess periferi, med 3 - 5 baslängders avstånd från varandra. Stödpunkterna i blockets hörn är särskilt viktiga och bör därför dubbleras eller tredubblas för tillförlitlighetens skull. Se Figur 14.6.

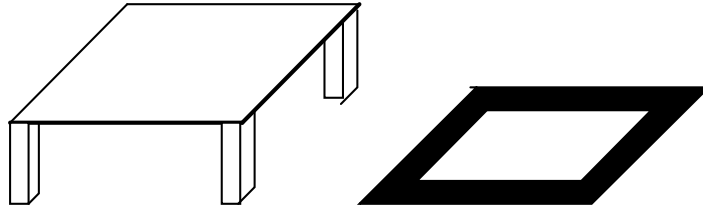
Stödpunkter placeras bara i undantagsfall utanför det område, som ska kartläggas. Stöden i blockets ytterkanter kan därför behöva förskjutas från det fotograferade blockets hörn och kanter enligt Figur 14.6 till karteringsområdets gräns.

Uppdraget att ta fram eller revidera ett primärkartverk kan medföra behov av att samtidigt planera en förtätning av det geodetiska stomnätet. GPS-teknik för inmätning av stom- och stödpunkter och för kompletterande detaljmätning har medfört större frihet i denna planering.

I framtiden kan man kanske förvänta sig blocktriangulering helt utan stödpunkter. Med tillräckligt noggrann integrerad navigering kan den yttre orienteringen av varje enskild bild bestämmas med tillräcklig noggrannhet redan under flygningen. Då kanske inte heller blocktriangulering behövs.

Signalering

GPS-stödd blocktriangulering medför, att endast ett fåtal stödpunkter behöver mätas in geodetiskt enligt Figur 14.6. *Stödpunkter i plan* måste normalt *signaleras*. Signalering innebär, att punkterna görs synliga i flygbilderna genom att vita skivor läggs ut eller vita rutor målas runt punkterna (Figur 14.7). Signalernas storlek anpassas till den valda flyghöjden, så de får en lagom, mätbar storlek i flygbilderna. Tabell för lämplig signalstorlek i HMK-Fo kan tjäna till ledning.



Figur 14.7. Exempel på flygsignaler i form av skiva resp. målad kvadrat med kontrastbård.

Lyckade försök har gjorts med enbart naturliga stödpunkter i plan. Som naturliga stöd har då kantstenar, brunnslock, målade övergångsställen och takhörn använts. Särskilt på landsbygden kan det emellertid vara svårt att hitta tillräckligt bra definierade planstödpunkter.

Som *stödpunkter i höjd* utnyttjas normalt *naturliga*, plana ytor, som inte behöver signaleras. Rekommendationer om val av lämpliga lägen återfinns i HMK-Fo. För att stereoperatören ska kunna återfinna stödpunkterna i bilderna upprättas punktskisser för samtliga punkter, både signalerade och naturliga.

Flygfotografering

Flygfotografering för storskalig kartdatainsamling utförs normalt på våren, mellan snösmältning och lövsprickning, för att ge bästa möjliga insyn mot marken. Fotograferingen upphandlas enligt anbud och utförs helt enligt resp. kunds önskemål. Merparten av uppdragen utgörs av låghöjdsfotografering för framställning av primärkarta från flyghöjder mellan 1 000 och 1 500 m, dvs. i bildskalor – beroende även på kamerakonstanten – ca 1:8 000 – 1:20 000.

Flygfotografering för ortofotoframställning, för Lantmäteriets kartproduktion, för skogliga ändamål och för orienteringskartor utförs ofta från högre flyghöjder, ca 2-5 000 m eller högre, och (med undantag för orienteringskartorna) senare på året.

Stråknavigering för flygfotografering utförs med hjälp av kontinuerlig GPS/INS-stödd lägesbestämning av flygplanet. Vid planering av flygfotouppdraget introduceras de önskade bildlägenas koordinater i kamerans styrdator. Denna utlöser kameran i de förvalda lägena, och bildernas lägesdata kan i efterhand användas för uppritning av stråköversikter för bildarkivet. Flygföraren ser på en skärm kontinuerligt flygplanets läge i plan och höjd jämfört med det planerade flygstråket. Flygfotooperatören bearbetar i efterhand lagrade kameradata till bilddata i svart-vitt, färg och/eller IR-färg, beräknar preliminära yttre orienteringsdata ur det integrerade navigationssystemet och levererar bild- och orienteringsdata i önskat format till beställaren (om inte blocktriangulering ingår i beställningen).

I mån av att *bildinventering* genomförs efter flygfotograferingen, utgör den underlag för blocktrianguleringen och den fotogrammetriska kartdatainsamlingen ("stereokarteringen"). De utlagda flygsignalerna i det aktuella området inventeras i bilderna, och man kontrollerar med stöd av signaleringsplanen att de syns. Samtidigt väljs lämpliga lägen för naturliga stödpunkter, dvs. plana ytor för höjdstöd och tydliga detaljer för planstöd, och höjdstödsskisser ritas för dessa. Bildinventeringen utgör underlag, dels för geodetisk inmätning av stödpunkterna, dels för fotogrammetrisk mätning av dem för blocktrianguleringen.

Därefter vidtar den geodetiska inmätningen av stödpunkterna. Med dessa data givna kan blocktriangulering utföras enligt beskrivningen i avsnitt 13.2.

14.1.5 Fotogrammetrisk detaljmätning

Efter blocktrianguleringen kan de enskilda modellerna orienteras var för sig. Bildernas yttre orienteringselement, som ju erhålls ur blocktrianguleringen, hämtas ur databasen för varje enskild bild i blocket. Därefter kan bilderna parvis bilda stereomodeller utan föregående orientering. Normalt kontrolleras dock särskilt relativorienteringen innan detaljmätningen påbörjas.

Vid den fotogrammetriska inmätningen av plandetaljer knyts digitala koder för resp. objekttyp till de mätta kartobjekten, och de lagras punkt-, linje- eller ytvis i kartdatabaser.

Systematisk organisation av mätarbetet är viktigt för kartans fullständighet och kodningens riktighet. Ett sätt att organisera mätningen är, att kartera ett kvarter i taget i följande ordning:

- Vägar, gator och infarter
- Vegetations-, ev. fastighets- och andra gränser
- Byggnader
- Övriga anläggningar (murar, trappor, stolpar, staket, diken, brunnar m.m.)

En annan tillämpad mätordning är

- Sjöar och vattendrag
- Byggnader
- Vägsystem, järnvägar m.m.
- Ägoslag (skog, åker, äng m.m.)
- Skogsområden med osäker höjdmätning, punkthöjder
- Brytlinjer

Detalj-mätningen utförs med hänsyn till hur den tredimensionella kartdatabasen avses bli uppbyggd. Man eftersträvar topologi, dvs. logisk samhörighet mellan objekt-detaljerna. Exempel på detta är att beskrivningspunkter eller linjer definieras och att alla plandetaljer tilldelas objekt-koder, t.ex. hus (takhörn, taknockar etc.), vägar (vägbanekanter, slänkrön, kantsten etc.) och hägnader (plank, stenmur, stödmur etc.). Anvisningar för detta återfinns i HMK, hos Trafikverket, i kommuner m.fl.

Linje- och ytformiga objekt mäts i flera punkter, som sammanbinds med datorgrafik. Höjdförhållanden inmäts med digital bildmatchning, som skapar en digital höjdmödel. I svärmätta bildpartier, t.ex. i tät bebyggelse eller skog, kan terränghöjder kompletteras punktvis. Alternativt kan höjddata hämtas ur en separat laserskanning av området. Resultatet kan presenteras kartografiskt som höjdkurvor.

Detalj- och höjdmätningen resulterar i en *kartdatabas*, kodad för olika typer av kartobjekt. Resultatet, kartan, presenteras på datorskärm och editeras, dvs. justeras i sina detaljer, korrigeras och kompletteras där så behövs. Editeringen utförs i ett grafik- eller CAD-program vid en grafisk arbetsstation. Det blivande kartverkets bladindelning behöver inte beaktas vid flygfotoplaneringen eller mätningen utan hanteras först vid editeringen.

Kartutskrift utgör ett fristående moment efter det att kartdata editerats. Vid utskriften kan skala, bladindelning, kartinnehåll och ritmanér väljas tämligen fritt för olika ändamål. Innehållet styrs genom val av vilka objektstyper som ska ingå i utskriften.

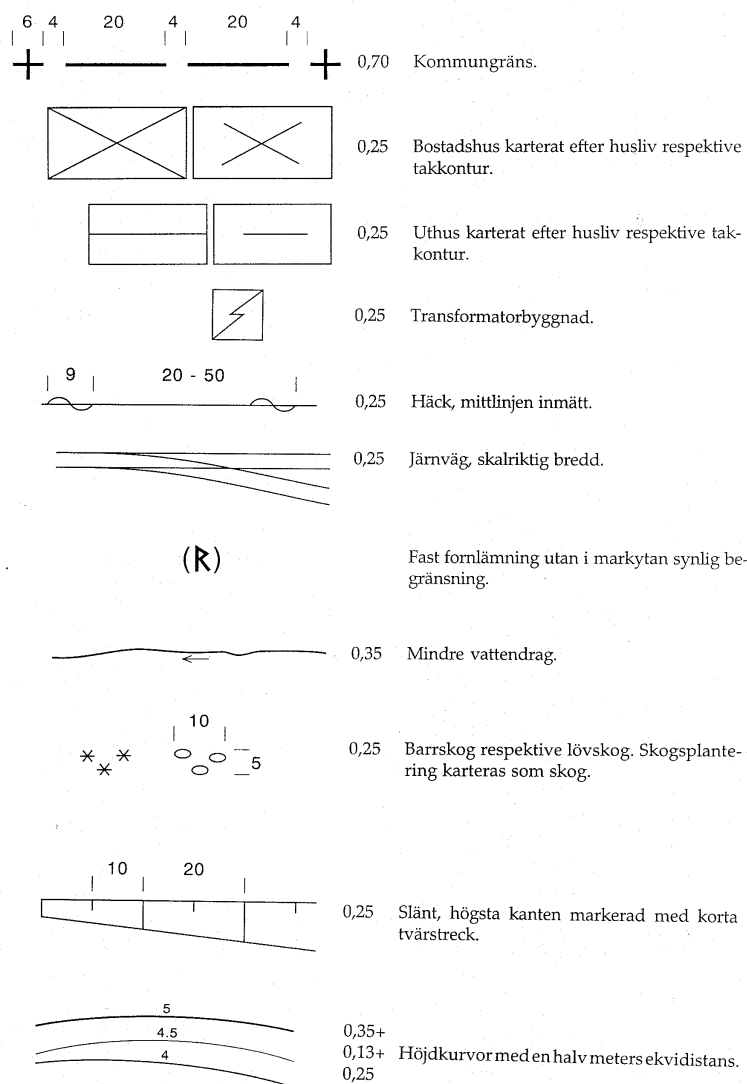
Olika karttyper kan sålunda framställas ur samma grundmaterial. Ritmanér för storskaliga kartor väljs normalt enligt anvisningarna i HMK-Kartografi (HMK-Ka), se Figur 14.8. En fördel med standardiserat utförande av kartan är, att vid komplettering eller revidering av en befintlig kartdatabas kan beställaren fritt välja konsult för arbetet, och resultatet får samma utseende oberoende av konsult. Ett exempel på en kommunal primärkarta (baskarta) i standardiserat utförande återfinns i Figur 14.1.

Den framställda *kartans kvalitet* fältkontrolleras med avseende på fullständighet, riktighet och noggrannhet. Eftersom vissa objekt varit skymda i bilderna, och viss tid förflutit sedan flygfotograferingen, kan kartans fullständighet och aktualitet fordra geodetisk kompletteringsmätning av tillkomna kartobjekt. Kontrollen av noggrannhet genomförs som stickprovsvis geodetisk inmätning av karterade detaljer. Noggrannheten (avsnitt 13.3) beräknas i form av standardosäkerhet, dvs. kvadratisk medelvärde av motsägelserna i plan och höjd mellan fotogrammetrisk och geodetisk inmätning av punkterna. Enligt HMK-Fo bör resultatet inte överstiga dubbla de värden som gäller för signalerade objekt. Det bör kunna jämföras med begreppet utökad mätosäkerhet, dvs. resultatet bör inte överstiga två gånger den erfarenhetsmässigt förväntade mätosäkerheten.

Kontroll av höjdkurvor genomförs med avvägning eller trigonometrisk höjdmätning av profiler i terrängen. Kurvans planläge bör inte avvika från det rätta läget mer än 1/3 av avståndet till närmast intilliggande kurva. Det innebär, att dess mätosäkerhet i höjd bör motsvara en tredjedel av ekvidistansen. Med modern teknik och om erfarenhetsgrundade rekommendationer följs, är dessa krav normalt inte svåra att uppfylla.

Revidering av befintliga kartdatabaser genomförs på i princip samma sätt som vid nymätning. Som stödpunkter vid blocktriangulering och ev. absolutorientering kan ofta befintliga kartdetaljer väljas, vilket minskar behovet av signalering och geodetisk stödpunktsmätning. Vid revideringsarbetet kan den befintliga kartbilden visas på separat bildskärm eller läggas som överlägg till stereomodellen på arbetsstationens bildskärm. Överläggsteknik effektiviserar stereoarbetet väsentligt, även vid nymätning av kartdata.

KARTBETECKNINGAR



Figur 14.8. Några exempel på standardiserade karttecken för storskaliga kartor. Ur HMK-Ka.

14.2 Digitala höjdmodeller

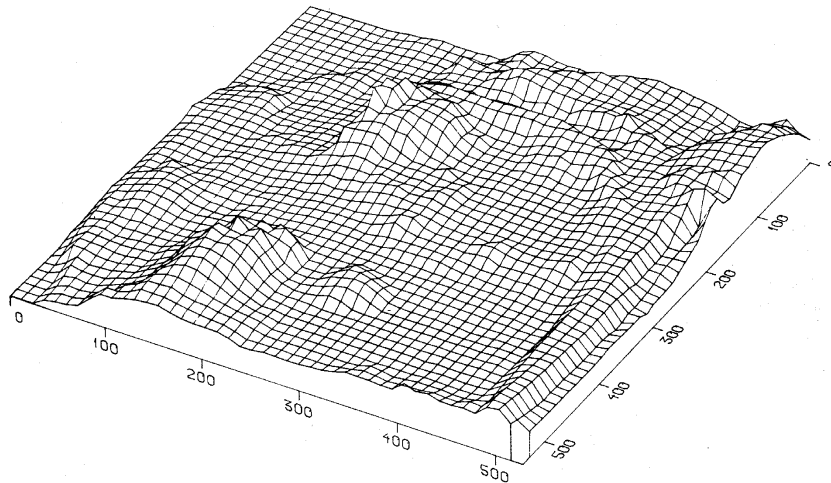
14.2.1 Fotogrammetrisk mätning av höjdmodeller

En *digital höjdmodell* (DEM, Digital Elevation Model, Figur 14.9), ibland betecknad markmodell eller något missvisande terrängmodell, är ett tätt nät av höjdpunkter, som beskriver terrängytans form. Fotogrammetri (liksom flygburen laserskanning, se Kapitel 15) är en effektiv metod att mäta de många punkter, som tillsammans utgör höjdmodellen.

I digitala arbetsstationer kan mätning av digitala höjdmodeller automatiseras.

Programmet stegar fram till varje förvald mätpunkt, och operatören ställer bara in mätmärket i höjd. Med s.k. progressiv mätning kan även valet av punktnätets täthet automatiseras beroende på terrängens branthet. Ett glest punktnät förtätas då successivt med hjälp av kriterier för maximalt tillåten höjdskillnad mellan intilliggande punkter. Resultatet blir höjdmätta punkter i tätare nät vid brantare eller mer kuperade terrängpartier, glesare nät vid jämnare mark.

Med digital bildmatchning, dvs. automatisk korrelationsberäkning mellan bilddata i digitala bildpar (se avsnitt 13.2), kan även höjdställningen automatiseras. Detta fordrar dock relativt öppen terräng, eftersom insynen i tät skog är begränsad. Även hustak och trädkronor kommer att matchas, varför höjdmodellen, då ofta kallad ytmodell, behöver editeras efter mätningen. Punkttätheten kan med nyare matchningsteknik, s.k. semi-global matching, bli lika hög som bildupplösningen, dvs. varje bildelement kan få ett höjdvärde.

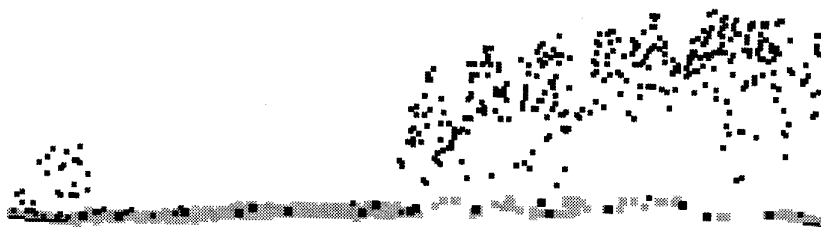


Figur 14.9. Grafisk illustration av digital höjdmodell. Varje maska representerar ett höjdvärde. (A Östman)

Digitala höjdmodeller kan mätas i oregelbundna nät, men interpoleras och lagras ofta som regelbundna rutnät av punkter. Ett vanligt sätt är annars att binda samman de oregelbundet mätta punkterna i ett triangelnät, s.k. TIN-nät (eng. Triangular Irregular Network). När höjddata ska användas, t.ex. för ortofoto, generering av nivåkurvor eller volymeräkning, interpoleras de ur nätet i förvalda planlägen, beroende på tillämpningen. För att representera terrängens karakteristiska ytform bättre, kan rut- eller TIN-nätet kompletteras med brytlinjer, dvs. inmätta kanter i terrängen, över vilka höjdvärden inte interpoleras.

En alternativ teknik att insamla höjddata erbjuds med *flygburen laserskanning* av landskapet från flygplan eller helikopter. Se Kapitel 15. Markens höjddata samlas in i ett tätt punktnät. Punktavståndet blir några dm från 200-400 m flyghöjd, några meter från några tusen meters flyghöjd. Mätosäkerheten är från den lägre höjden ca 10 cm i både plan och höjd, från den högre ca 0,5 m.

Den yttre orienteringen av varje enskild laserpuls måste bestämmas för att läget av den reflekterande markpunkten ska kunna beräknas. Flygburen laserskanning erfordrar därför ett integrerat navigationssystem, se avsnitt 12.3. Även stödpunkter på marken fordras dock för att förbättra det s.k. punktmolnets geografiska läge. Beräkningen har stora likheter med blocktriangulering.



Figur 14.10. Profil i landskapet, uppmätt med laserskanning. Grå mätpunkter betecknar markyta, svarta är trädkronor. (H Rost)

Resultatet av laserskanning är ett mycket tätt nät av höjdpunkter, som inkluderar alla objekt i landskapet, även detaljer och objekt av typ byggnader, träd, buskar, bilar mm. Resultatet betecknas därför digital ytmodell (DSM, eng. Digital Surface Model), se Figur 14.10. För att erhålla en höjdmodell över enbart markytan måste laserpunkter från vegetation och byggnader filtreras bort. Det kan utföras med statistisk filtrering av data. Ytmodellen reduceras då till en höjdmodell, medan vegetation och byggnader kan lagras separat i egna filer.

Insamlade datamängder med laserskanning blir i likhet med digitala bilder eller höjddata från digital bildmatchning mycket stora. Ett alltför tätt punktnät kan glesas ut till lämplig täthet innan den digitala höjdmodellen räknas fram som en triangelmodell (TIN).

14.2.2 Höjdmodellens kvalitet och användning

Den digitala höjdmodellens kvalitet, vare sig den fångats med digital bildmatchning eller med flygburen laserskanning, blir beroende av landskapets brutenhet och av förekomsten av skog och tät bebyggelse. *Noggrannheten* beror av mätosäkerheten i varje mätt punkt, av terrängens brutenhet och vegetation, av punktnätets täthet och av interpolationsmetoden. Mätosäkerheten blir större än som anges i avsnitt 13.3, eftersom mätpunkterna ofta är mindre väl definierade. Flyghöjden får anpassas till detta och till de aktuella noggrannhetskraven. Även punkttätheten bör anpassas till noggrannhetskraven och till terrängens brutenhet, och fotogrammetriskt eller geodetiskt mätta brytlinjer bör läggas in och få styra interpolationen.

Avvikelseerna i digitala höjdmodeller är till stor del av systematisk natur, och beroende av terrängtyp. Vid slät markyta, t.ex. gräsmattor och asfalt, är de små (några cm), men i "grov" terräng, t.ex. i skogsmark, kan punkthöjderna generellt bli 1-2 dm för höga, även från låg flyghöjd (800 m). Dessutom ökar de tillfälliga avvikelseerna (dvs. standardosäkerheten) i grövre terräng.

Lantmäteriet har framställt nationella höjdmodeller, baserade på flygburen laserskanning. Resultatet är bland annat en höjddatabank med en punkttäthet om 2 x 2 m och en standardosäkerhet i höjd om 0,2-0,5 m. Den är mycket användbar.

Digitala höjdmodeller används inom planering och projektering. Exempel på tillämpningsområden är

- konstruktion av höjdkurvor och terrängskuggning inom kartografi,
- val av linjeföring, massberäkning och massbalansering vid projektering av vägar och järnvägar,
- volymbestämning av upplag, grushögar och uttag ur grus- och bergtäkter,
- framställning av ortofoton (se avsnitt 14.1),

- kartering av riskområden för översvämning, samt
- visualisering, dvs. konstruktion av snedperspektiv och tredimensionella digitala stadsmodeller som underlag för fysisk detaljplanering.

Den digitala ytmodellen kan ”draperas” med en omräknad, digital flygbild eller ett ortofoto. Även uppmätta husfasader m.m. kan ”kläs” med digitala markbilder. Resultatet blir en mycket realistisk digital stads- eller landskapsmodell, som kan utgöra underlag för t.ex. planering, turistinformation eller flygsimulering.

Den digitala kartdatabasen och digitala höjdmodeller kan utnyttjas tillsammans med andra lägesbundna data, t.ex. geologiska data, vegetationsdata, fastighets- och befolkningsdata. Kartdatabasens filer utgör då tillsammans med övriga datafiler informationslager i geografiska informationssystem (GIS). Ofta utgör ett digitalt ortofoto bakgrund till sådana data. Exempel på tillämpningar av GIS är samhällsplanering, projektering av byggnader och anläggningar och planering av mobiltelefoninät.

14.3 Småskalig kartframställning

14.3.1 Omdrevsfotografering

Med småskaliga kartor avses normalt kartor i skala 1:5 000 och mindre. Lantmäteriets allmänna kartserier, orienteringskartor och skogskartor är exempel på småskaliga kartor. För framställning och revidering av allmänna kartor och för att tillgodose landets allmänna behov av flygbildsmaterial utförs flygfotografering från höga höjder enligt en långsiktig, normalt femårig, s.k. omdrevsplan. Fotograferingen benämns därför omdrevsfotografering.

Under hela senare hälften av 1900-talet användes för detta ändamål fotografiska kameror med kamerakonstanten 15 cm. Dessa gav från flyghöjden 4600 m (”normalhöjd”) bildskalan 1:30 000, och från 9200 m (”höghöjd”) bildskalan 1:60 000. Normalt användes svart-vit film, men omdrev med IR-färgfilm har genomförts. I vissa fall har flyghöjden 3000 m, som gav bildskala 1:20 000, eller 13 200 m, som med kamerakonstanten 9 cm gav bildskala 1:150 000, använts. Alla dessa bilder finns arkiverade och kan skannas till digital form.

Omdrevsfotografering görs numera med digital flygmätkamera. Planering av sådan fotografering avviker i vissa avseenden från planering med analog kamera. Använda flyghöjder är ungefär desamma som med fotografisk kamera. Exempelvis ger flyghöjden 4 800 m med DMC-kameran (avsnitt 13.3) bildskalan 1:40 000. Omdrevsfotografering planeras normalt i nord-sydliga stråk, men undantag finns.

14.3.2 Framställningsteknik. Fotokartor

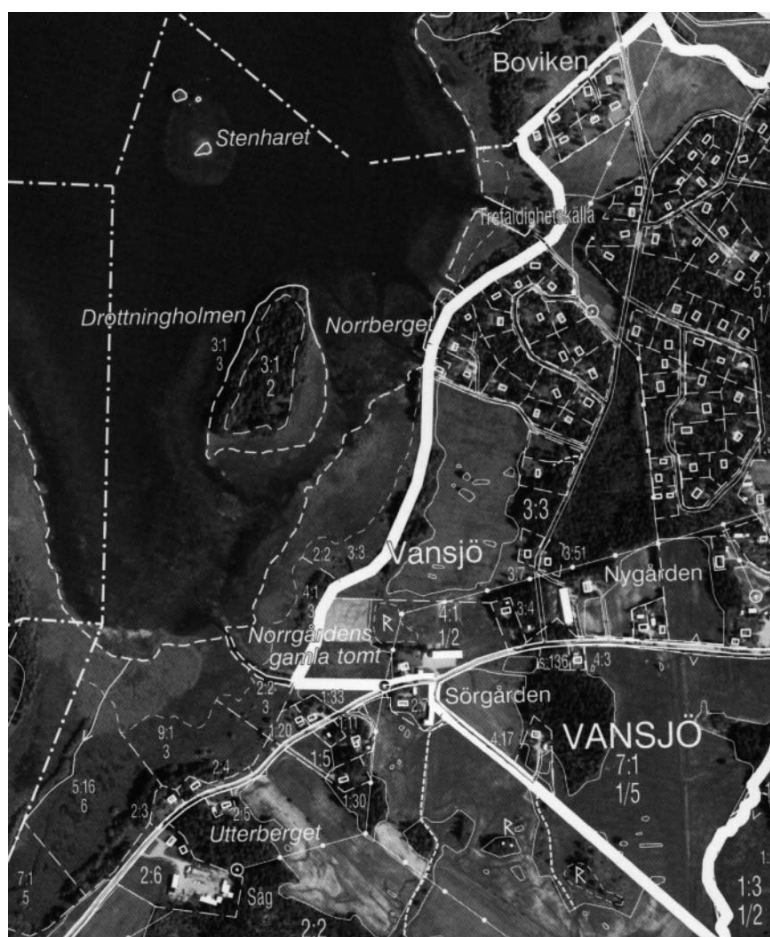
Kartor i skalområdet 1:5 000 – 1:50 000 framställs normalt på samma sätt som storskaliga kartor, dvs. de stereokarteras fotogrammetriskt. Exempel på detta är fastighetskartan (f.d. ekonomiska eller Gula kartan), terrängkartan (f.d. topografiska eller Gröna kartan) och orienteringskartor. Vissa småskaliga kartor kan emellertid framställas genom förminskning, sammansättning och generalisering av storskaliga primärkartor (exempel är turistkartor och kartor för översiktsplanering) eller via tolkning i ortofoto (t.ex. skogskartor). Ortofoton från omdrevsbilder från höga flyghöjder medför behov av en icke obetydlig fältarbetsinsats för att komplettera det tolkade kartunderlaget. Den ökade tillgängligheten av fotogrammetriska arbetsstationer

Kapitel 14: Fotogrammetriska tillämpningar

har (åter) ökat användningen av stereoritning. Detta har begränsat fältarbetsinsatsen jämfört med tolkning i ortofoto, som länge var vanligast.

Ofta är det önskvärt att framställa kartor som kombinerar en ritad karta med en fotobild. En sådan karta kallas *fotokarta* eller *bildkarta*. Fotokartor framställs med stereoritade kartdetaljer, som överlagras ortofoton, ofta i skalområdet 1:5 000 – 1:20 000. Exempel är fastighetskartan och andra småskaliga fastighetsregisterkartor (Figur 14.11), skogskartor och kartor för översiktlig planering och som projekteringsunderlag i tidiga skeden, t.ex. för Trafikverket. Småskaliga bildkartor kan också framställas med utnyttjande av satellitbilder. Exempel på fotokartor ser vi varje dag i sökoperatörer på nätet (Eniro, Hitta och Google), i våra mobiltelefoner och i GPS-navigatorer.

Även storskaliga, kommunala fastighetsregisterkartor kan utformas som fotokartor, ofta i skala 1:2 000. För storskalig (större än 1:5 000) ortofotoframställning erfordras nymätning av digital höjdmodell med större punkttäthet och högre höjdnoggrannhet än Lantmäteriets hittillsvarande höjddatabank. De nationella höjdmodellerna har emellertid ökat möjligheterna att använda tillgängliga höjddata.



Figur 14.11. Exempel på fastighetsregisterkarta i form av ortofotokarta i skala 1:10 000 (Metria).

Digitala ortofoton kan sättas samman till en skarvlös mosaik. Geometriska och radiometriska skillnader mellan ortofotona utjämnas då i skarvarna, som förläggs där de märks minst. Storskaliga ortofoton över storstadsområdena har tagits fram av bl.a. konsulter och berörda kommuner och finns tillgängliga även via Internet.

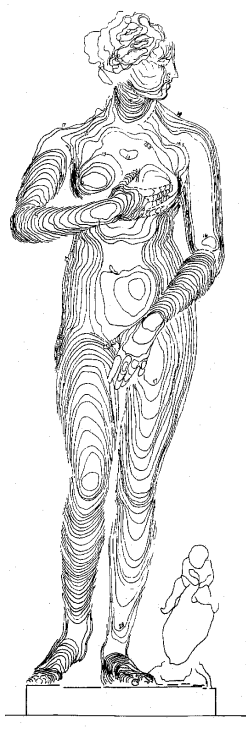
Digitala ortofoton är väl lämpade att lagras tillsammans med annan digital kartinformation i kartdatabaser. Lantmäteriet har under senare år prioriterat framställning av

digitalt kartmaterial, benämnt Geografiska Sverigedata (GSD). Däri ingår bl.a. en digital version av fastighetskartan med ortofotounderlag.

14.4 Markfotogrammetri

14.4.1 Kameratyper

Markfotogrammetri (terrester fotogrammetri) är den ursprungliga formen av fotogrammetri. Tekniken praktiserades redan från mitten av 1800-talet för såväl topografiska som icke-topografiska ändamål, dvs. såväl för kartframställning från bergstoppar som för t.ex. dokumentation av byggnader. Efter flygfotogrammetriens utveckling på 1920-talet används tekniken så gott som uteslutande för icke-topografiska ändamål.



Figur 14.12. Stereokamera med fast bas (Leica /Wild P32), och exempel på uppmätt skulptur (KTH Fotogrammetri).

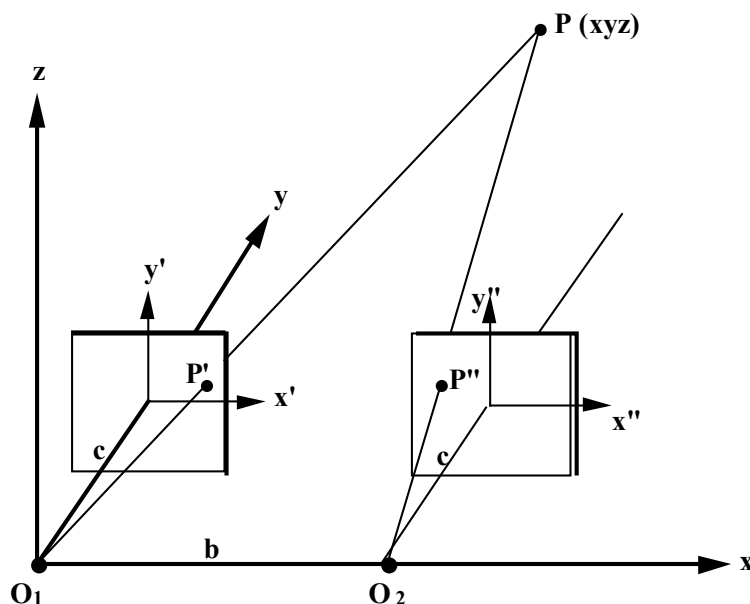
Kameran eller kamerorna kan monteras på stativ och kan därför mätas in geodetiskt. Det medför, att bildernas yttre orientering blir känd. I princip skulle alltså inte relativ och absolut orientering behöva genomföras. I de flesta fall genomförs ändå detta, främst för att öka mätnoggrannheten genom att små modelldeformationer kan reduceras.

Digitala kameror (se avsnitt 12.2) eller digitala CCD-bakstycken till fotografiska kameror är numera helt dominerande inom markfotogrammetri. Bildformaten är normalt mindre än flygkamerans, från ca 10x15 mm till ca 5x5 cm. Ofta används okalibrerade, ”vanliga” kameror, vilket har medfört att kalibreringsrutiner för sådana utarbetats. Ibland används *stereokamera*, dvs. två kameror parallellt monterade på en fast bas (se Figur 14.12). Därigenom kan fotogrammetriens normalfall uppnås strängt, och basen blir känd, vilket förenklar de fotogrammetriska beräkningarna väsentligt. Det finns även rutiner för utvärdering av filmsekvenser, tagna med rörlig videokamera.

14.4.2 Markfotogrammetrins normalfall

Markfotogrammetrins normalfall kan alltså med hjälp av stereokamera uppnås strängt, varigenom parallaxformlerna kan användas med god kvalitet. Kamerauppställningen medför normalt, att de parallella kameraaxlarna blir (ungefär) horisontella (och naturligtvis vinkelräta mot basen). Se Figur 14.12 och Figur 14.13, där bilderna liksom tidigare (Figur 13.9) ritats i positivläge.

Bild- och modellkoordinatsystemen definieras precis som i flygfotofallet (avsnitt 13.2, Figur 13.9), men fotograferingsriktningarna är nu horisontella, dvs. båda kamerorna är jämfört med flygfotofallet roterade runt x-axeln vinkeln $\omega = \pi/2$ (100 gon). Vänster kameraaxel sammanfaller därigenom med modellsystemets positiva y-axel (i stället för med flygfotofallets negativa z-axel).



Figur 14.13. Markfotogrammetrins normalfall. Bilderna i positivläge.

Bildkoordinatsystemens x-axlar (x' och x'') är fortfarande parallella med modellsystemets x-axel, men y-axlarna (y' och y'') blir parallella med modellsystemets z-axel. Parallaxformlerna i markfotogrammetrins normalfall blir därigenom något annorlunda än i flygfotogrammetrins normalfall. Modellkoordinaterna ($x y z$) beräknas enligt:

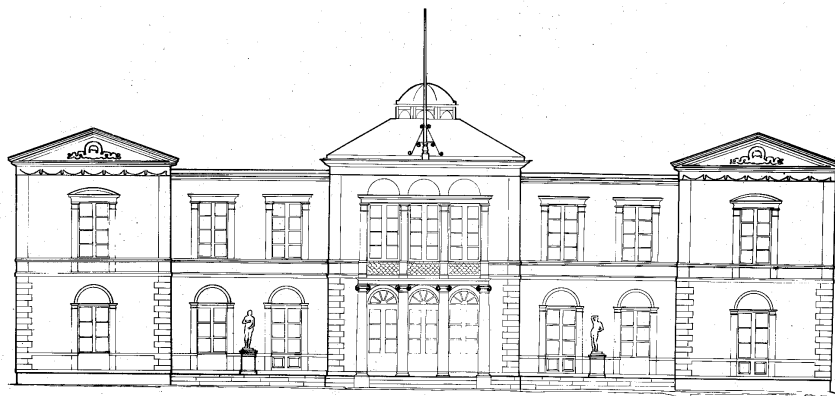
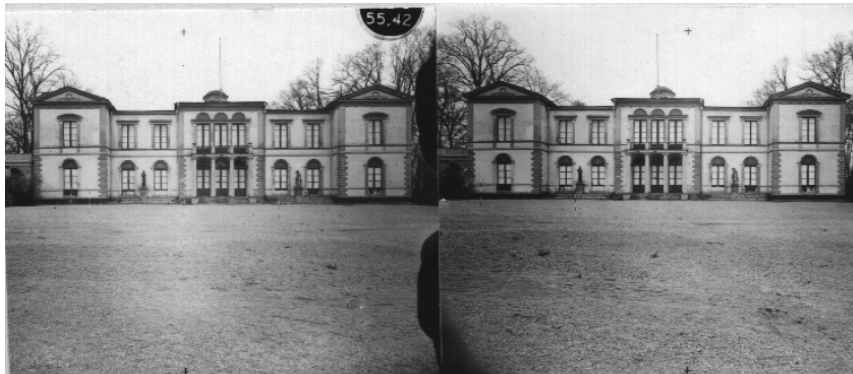
$$x = x' \frac{b}{p_x} \quad y = c \frac{b}{p_x} \quad z = y' \frac{b}{p_x}$$

X- och y-parallaxernas benämningar horisontal- resp. vertikalparallax känns här helt naturliga. Horisontalparallaxen definieras även här

$$p_x = x' = x'',$$

medan vertikalparallaxen i normalfallet blir lika med noll. Teoretiskt är alltså $y' = y''$, men för att minimera effekten av mätosäkerhet kan medelvärdet av dem användas i formeln. Liksom i flygfotofallet (avsnitt 12.3) definieras bildhuvudpunktens H läge av läget $(r k)_H$ för dess rad och kolumn i bildmatrisen, och bildkoordinaterna ($x' y'$) utgår från H .

För att skalbestämma modellen räcker det med att ange eller ställa in fotograferingsbasen (b_f). Då erhålls modellkoordinater i objektets skala (dvs. skala 1:1). Om basen är okänd, kan man mäta en känd sträcka (ev. signalerad) i objektet och i stereomodellen. Med hjälp av den kända sträckan beräknas ett värde på basen b , så att modellen får önskad skala. Metoden finns beskriven i avsnitt 13.2.



Figur 14.14. Exempel på byggnadshistorisk dokumentation av Rosendals slott med markfotogrammetri. Stereokamera med fast bas har använts (KTH Fotogrammetri).

För att erhålla objektkoordinater i ett yttre koordinatsystem måste stödpunkter inkluderas i objektet, varefter stereomodellen absolutorienteras med tredimensionell likformig transformation (se avsnitt 13.2).

14.4.3 Markfotogrammetrins allmänna fall

I markfotogrammetri tillämpas ofta fri uppställning av kamerorna, dvs. bilderna kan vara tagna i fritt valda riktningar mot objektet. Normalfallet kanske inte ens föreligger approximativt. Då måste motsvarande procedur som i flygfotogrammetri, inklusive signalering av stödpunkter samt relativ och absolut orientering tillgripas, och beräkningen av modellkoordinater blir mer komplicerad. Det är därför inte ovanligt att planera även markfotogrammetri för blocktriangulering. För att lösa det lineariserade ekvationssystemet erfordras då, att närmevärden på kamerornas yttre orienteringselement bestäms. Det kan göras geodetiskt eller genom att förse kameran med ett integrerat navigationssystem. Ett sådant block kan bestå av ett stort antal bilder, tagna runt om det avbildade objektet, eventuellt med en rörlig videokamera. Man talar då om utvärdering av bildsekvenser. Är övertäckningen tillräckligt stor i en sådan bildsekvens, kan tillräckligt många överbestämningar erhållas för en blockutjämnning utan närmevärden. Med små kameror, lämplig mjukvara och bärbar dator kan i vissa fall hela den fotogrammetriska mätprocessen utföras på plats, ”bärbar fotogrammetri”. Inom detta område pågår en snabb utveckling.

14.4.4 Markfotogrammetrins mätosäkerhet

På samma sätt som vid flygfotogrammetri (avsnitt 14.3) kan markfotogrammetrins mätosäkerhet utvecklas genom derivering av parallaxformlerna i normalfallet. Resultatet blir förstås något annorlunda:

$$\begin{aligned}s_x &= m_b s_{x'} \\ s_y &= m_b s_{x'} \sqrt{2} / (b/y) \\ s_z &= m_b s_{y'}\end{aligned}$$

Standardosäkerheten i ett lodrätt xz-plan i objektet är således lika med mätosäkerheten i bilderna ”uppförstorade” med bildskalan (m_b). Standardosäkerheten i djupled (s_y) är dessutom omvänt proportionellt mot ”bas/djupförhållandet” (b/y , jfr bas/höjdförhållandet i avsnitt 13.3). Det innebär, att s_y blir proportionellt mot kvadraten på y-koordinaten. (Sätt in $m_b = y/c$ i formeln för s_y !) En väsentlig skillnad mot flygfotogrammetrin är, att det avfotograferade objektet kan ha ett väsentligt djup i förhållande till fotograferingsavståndet (Ett landskap är förhållandevis platt i förhållande till flyghöjden!). Både bildskalan ($1:m_b$) och ”bas/djupförhållandet” (b/y) kan alltså variera kraftigt för olika delar av objektet (men modellskalan är konstant för hela modellen!). Båda faktorerna ($1:m_b$ och b/y) avtar, då avståndet (y) från kamerorna till objektets olika delar ökar. Därför ökar som sagt standardosäkerheten i modellen kvadratisk med djupet (y). Objektets största djup blir därför helt avgörande för val av lämplig bas och lämpligt fotograferingsavstånd.

14.4.5 Tillämpningsområden

Digital markfotogrammetri har funnit många nya tillämpningar. Exempel på tillämpningsområden är

- byggnadshistorisk, konsthistorisk och arkeologisk dokumentation (Figur 14.12 och Figur 14.14),
- kontrollmätning av verkstadstekniska detaljer inom bl.a. bilindustrin,
- uppmätning av industriinteriorer och industriprodukter, t.ex. i kärnkraftverk,
- deformationsmätningar av t.ex. broar,
- utredning av trafikolyckor och bilprovning
- medicinska och odontologiska undersökningar.

I flera av dessa tillämpningar utförs fotogrammetriska mätningar även i röntgenbilder, numera oftast dock med datortomografiska metoder.

Markfotogrammetriska bilder används också dels i kombination med terrester laserskanning för att göra realistiska modeller av byggnader och interiörer, dels tillsammans med flygfotogrammetri eller flygburen laserskanning för ”drapering” av husfasader på digitala stadsmodeller. Se kapitel 16.

Bil- och spårburna stereofotogrammetriska system (s.k. *mobile mapping*, Figur 14.15) har utvecklats för registrering av objekt på och intill vägar och järnvägar. Integrerade navigationssystem med GNSS för lägesbestämning och gyrosystem (tröghetsnavigering, TN) för riktningsbestämning används då för bestämning av yttre orienteringen hos fordonet och kamerasystemet. De digitala bilderna eller bildparen, som tas med hög frekvens medan fordonet kör, utvärderas automatiskt med hjälp av objektigenkänning och digital bildmatchning. Resultatet i form av läge och utseende hos terräng,

vägmärken, väglinjer och andra objekt utefter väglinjen eller motsvarande objekt utefter järnvägsspåret kan lagras i en väg- resp. järnvägsdatabas.



Figur 14.15. Fordonsburet integrerat sensorsystem (Lynx) med kameror, laserskannrar och ett integrerat navigationssystem (Terratec)

Den digitala ytmodellen, t.ex. uppmätta husfasader, kan draperas med omräknade, digitala markbilder eller ortofoton. Resultatet blir en mycket realistisk digital stads- eller landskapsmodell, som kan utgöra underlag för t.ex. planering, turistinformation eller flygsimulering.

Terrester, dvs. stativ- eller fordonsburen, laserskanning har tagit över flera av de traditionellt fotogrammetriska tillämpningsområdena. Tekniken har utvecklats till ett alternativ till terrester fotogrammetri för detaljerad inmätning av komplicerade objekt och miljöer, t.ex. interiörer och exteriörer av industrimiljöer och kulturhistoriska byggnader, byggnadsinteriörer och inredningsbara vindar. Tekniken används också i miljöer med begränsad tillgänglighet, t.ex. i bergtunnlar under sprängning, bergskärningar utefter vägar och arkeologiska utgrävningar, och för ytformer hos mindre föremål, t.ex. skulpturer eller verkstadsdetaljer.

Resultaten av markfotogrammetri eller terrester laserskanning överförs till CAD-system i form av trådmodeller eller som fullständiga 3D-modeller, som kan bearbetas till ritningar, kombineras med digitala bilder av objektet till en virtuell miljö eller vidareutvecklas till fullständigt tredimensionella BIM- (eng. Building Information Modelling) eller anläggningsmodeller.

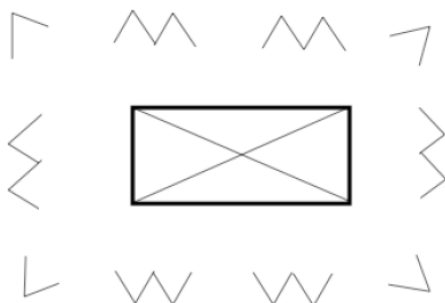
Fordonsburna system för registrering av väg- eller järnvägsmiljö (Figur 14.15) innehåller ofta såväl laserskannrar som kameror, alla styrda av det integrerade navigationssystemet. Man talar då om integrerade sensorsystem. Avsikten är, att ge en heltäckande yt- eller höjdmmodell runt fordonets färdväg. Ytmodellen kan ges ytterligare realism genom drapering med kamerabilderna.

14.4.6 Planering av markfotogrammetri med "3x3-metoden"

För att kulturhistoriska byggnader och andra objekt ska kunna dokumenteras fotografiskt så, att de i en framtid kan rekonstrueras fotogrammetriskt, bör bilderna tas enligt en viss strategi. En sådan, "3x3-metoden", har utvecklats av Waldhäusl och Ogleby (se litteraturlistan), främst för fotografering av byggnader och med målet, att "vem som helst" ska kunna dokumentera ett objekt för en framtida fotogrammetrisk

Kapitel 14: Fotogrammetriska tillämpningar

uppmätning. Tre huvudregler har vardera tre underrubriker, därav namnet. Viss överarbetning för digital fotografering har gjorts här. Figur 14.16 illustrerar en princip för fotograferingen.



Figur 14.16. Planering av kamerastationer (V) för dokumentation av en byggnad.

1) Tre geometriska regler

1.1) Ordna stödpunkter eller kända mått i objektet

- Mät med centimeternoggrannhet längder mellan tydliga detaljer, så långa som möjligt och minst en längd per sida av objektet. Markera med tejp.
- Sök lodlinjer i objektet, helst flera per sida, eller häng upp lodlinor.
- Alternativt markeras stödpunkter runt objektet, så de blir synliga i bilderna. Minst fyra i varje blivande stereomodell, och inte tre på rad. Mät in dem geodetiskt.

1.2) Planera fotostationerna

- Ta en serie bilder runt objektet, vinkelrätt mot fasaderna. Utefter objektets sidor ska bilderna överlappa varandra med minst 60 %.
- Vid varje hörn tas en diagonal bild.
- Ta helst bilderna på halva objektets höjd. Ta om möjligt även bilder av taket.
- Komplettera med översiktsbilder från längre håll.

1.3) Komplettera till stereopar

- Till varje fasadbild tas en stereopartner på ett basavstånd av ca 1/5–1/10 av avståndet till objektet.
- Stereopartneren tas med kameraaxeln parallell med den första eller konvergent mot samma syftpunkt på objektet
- Komplettera med sneda bilder och närbildspar, där det behövs.

2) Tre fotografiska regler

2.1) Välj en stabil kamera

- Välj objektiv av hög kvalitet. Använd helst vidvinkelobjektiv.
- Välj gärna stora bildformat.
- Kameran bör ha minst 6 MP CCD.

2.2) Håll den inre orienteringen konstant

- Använd ej zoom-optik, eller lås den i vidvinkelläget.
- Ingen autofokus! Lås fokuseringen på oändligt, och använd liten bländare för att få stort skärpedjup.

- För närbilder, lås fokuseringen på ett avstånd och behåll det.
- Se till att bildhörnen avbildas med god kontrast. (De ska definiera bildhuvudpunkten)
- Ta några av bilderna med kameran på högkant.

2.3) Ordna jämn belysning

- Fotografera gärna på morgonen eller kvällen, när ljuset är jämnast.
- Undvik skarpa skuggor. Lätt molnighet är bäst.
- Använd stativ och trådlösare.
- Undvik blix. Om konstgjord belysning används, flytta den inte mellan exponeringarna.

3) Tre organisatoriska regler

3.1) Gör skisser

- En bra översiktsskiss är nödvändig och bör innehålla
 - Objektets benämning och adress
 - Datum och fotografens namn
 - Ungefärlig skala och norrpil
 - Mätta sträckor och deras längder
 - Fotostationer med numrering och fotoriktningar
- Gör skisser av alla objektets sidor.
 - Samma innehåll som ovan
 - Dessutom lodlinjernas lägen och lägen för närbilder

3.2) Skriv protokoll

- Beskriv objektet
 - Typ av objekt. Ålder, stil, interiör
 - Arkitekt eller konstnär, objektets historia
 - Ägare, adress
- Tid, plats, fotograf,
- Kameratyp, objektiv
- CCD-typ och upplösning
- Inställningar (avstånd, tid, bländare).

3.3) Efterarbete

- Spara de digitala bilderna på lämpligt dataminne. Skriv ut goda kopior
- (Genomför ev. blocktriangulering med självkalibrering)
- Överlämna materialet till lokala myndigheter, eller ordna ett eget arkiv. Ägaren vill säkert ha kopior.

-----*****-----

Status: Enbart enstaka ändringar gjordes 2021 (ingen revidering)

15 Laserskanning

15.1 Introduktion

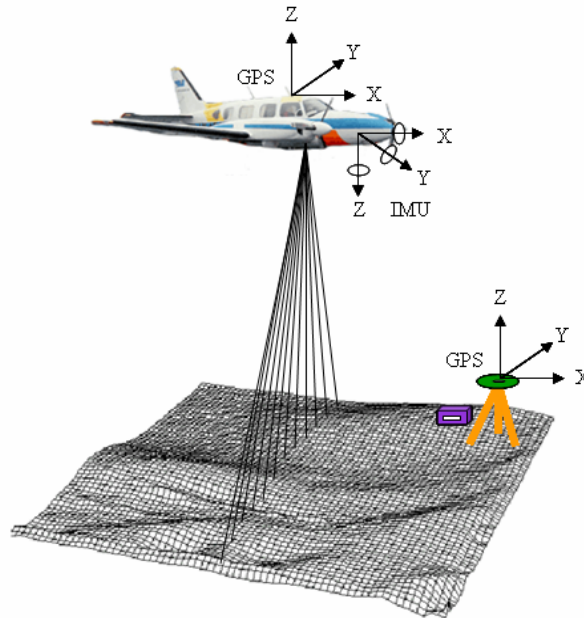
Laserskanning är en teknik som används för insamling av 3D-data. En laserskanner består av två huvuddelar: en laser för avståndsmätning och en skanner som fördelar mätningarna över ett större område. Det finns flygburna, bilburna och terrestra system för laserskanning. Principen att mäta avstånd med laser är densamma för alla teknikerna, och till stor del används samma algoritmer för delar av databehandlingen. Teknikerna har dock olika användningsområden. Flygburen laserskanning används exempelvis till framställning av höjdmodeller över större områden och för 3D-modeller av hela städer. Helikopterbaserad laserskanning används ofta för infra-strukturprojekt såsom järnvägar, vägar och kraftledningar, medan terrester laserskanning används på kortare avstånd och för mindre objekt som exempelvis 3D-modeller av enstaka byggnader, undersökning av tunnlar, dammar osv. I detta kompendium kommer både flygburen och terrester laserskanning att beskrivas.

Den första delen av kapitlet behandlar flygburen laserskanning: principen, beskrivning av tekniken och de olika delarna i ett laserskanningssystem, följt av felkällor, centrala begrepp, tillämpningar, planering, och slutligen databearbetning. Den andra delen handlar om terrester laserskanning, och börjar med en beskrivning av principen bakom tekniken och funktion av instrument. Därefter följer en beskrivning av databearbetning. Det ges inga ingående matematiska beskrivningar, istället hänvisas den intresserade till den litteratur som nämns under lästips.

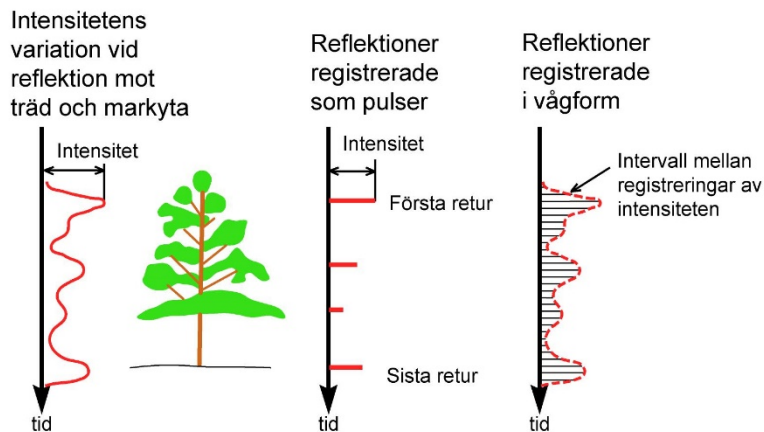
15.2 Principen för flygburen laserskanning

Flygburen laserskanning (FLS) innebär att ett laserskanningssystem monteras på ett flygplan eller helikopter tillsammans med ett positioneringssystem (Figur 15.1). Laserskannern sänder ut korta pulser av ljus. När dessa träffar markytan eller objekt ovan mark reflekteras delar av pulsen tillbaka mot skanningssystemet. Man mäter tiden det tar för reflektionerna att returneras, och eftersom pulsens hastighet är känd (ljusets hastighet) kan avståndet till en reflektionspunkt beräknas (jfr impulsprincipen med EDM-instrument i avsnitt 5.2.1). Genom att bestämma laserskannerns position med hjälp av GNSS och dess riktning med ett *tröghetsystem* kan en reflektionspunkts position i ett geodetiskt referenssystem bestämmas. Genom flygplanets rörelse mäts ett stort antal (typiskt miljontals) punkter över stora områden. En sådan uppsättning tätt placerade punkter kallas *punktmoln* (jfr Figur 15.10) och återger området i 3D.

Det är inte enbart markytan som reflekterar laserpulsen; även objekt ovan mark som vegetation och byggnader ger reflektioner. En och samma puls kan dessutom reflekteras mot fler än en punkt. Exempelvis kan toppen av ett träd ge upphov till en reflektion, grenverket till ytterligare reflektioner, och slutligen en sista reflektion från markytan. Den vänstra bilden i Figur 15.2 visar hur det reflekterade ljuset från en puls kan variera över tiden. Det vanligaste är att reflektionerna registreras av laserskannern som ett antal individuella pulser (de flesta system klarar 4-5) som i mellersta delen av figuren. Det är även möjligt att registrera hela vågformen. Denna digitaliseras genom att intensiteten registreras med ett tidsintervall om vanligtvis 0,5–1 ns, vilket motsvarar 0,075–0,15 m. Vid framställning av höjdmodell är det de punkter som härstammar från reflektion mot markytan som är intressanta. För att få fram dessa görs någon form av *markklassning* (även kallad filtrering).



Figur 15.1. Principskiss över FLS. IMU (Inertial Measurement Unit) är engelska för tröghetssystem. Källa: Lantmäteriet.



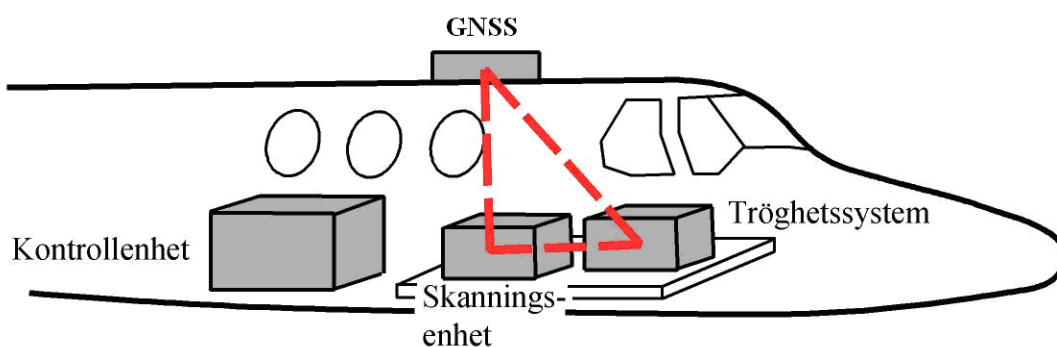
Figur 15.2. Exempel på hur reflektioner i ett träd och mot marken för en och samma laserpuls kan registreras vid laserskanning. Vänstra delen visar hur reflektionens intensitet varierar. Mitten visar den vanligaste typen av registrering där reflektionen registreras som individuella pulser. Till höger visas hur reflektionen registreras som en vågform. De horisontella linjerna visar den digitaliserade representationen av vågformen. Ide från Vosselman & Maas (2010).

15.3 Tekniken bakom flygburna laserskanningssystem

En laserskanner är en aktiv sensor, dvs. den sänder själv ut den energi (laserpulser, vilka är elektromagnetisk strålning) som används för att mäta avstånd. En kamera, som används vid flygfotografering för fotogrammetri, är däremot en passiv sensor. Detta eftersom den inte sänder ut någon egen energi utan mäter den elektromagnetiska strålning från solen som reflekterats på de objekt som syns i flygbilden. Det innebär att laserskanning har den fördelen att data kan samlas in även i mörker, till skillnad från flygbilder som kräver solljus. En annan skillnad mellan laserskanning och fotogrammetri är att det som syns på flygbilder är toppen av eventuell vegetation medan laserpulserna kan tränga igenom växtligheten och på så sätt ”se” även detaljer dolda under vegetation, exempelvis marknivån i skog. Detta är en fördel vid framställning av höjdmodell eftersom det intressanta då är markytans höjd.

Flygburna laserskanningssystem använder ofta våglängder mellan 800–1550 nm med en spektral vidd på 0,1–0,5 nm (dvs. hur brett våglängdsintervall av det elektromagnetiska spektrumet som strålen täcker). Det innebär att det är våglängder i den infraröda delen av spektrum (synligt ljus är ca 400–700 nm). Ett objekts reflektion av ljus beror på ljusets våglängd. Det gör att olika våglängder för laserpulsen ger olika reflektion på ett och samma objekt och att de olika våglängderna har olika för- och nackdelar. Bl.a. är det viktigt att tänka på att kortare våglängder kan orsaka ögonskador.

De olika komponenterna i ett system för FLS visas i Figur 15.3. Skanningsenheten består av: en ljuskälla (laser) som skickar ut korta ljuspulser, en mottagare som registrerar inkommande/reflekterat ljus, samt en skanner som fördelar ljuspulserna över ett större område. Det är viktigt att de inbördes lägena för skanningsenhet, GNSS och tröghetssystem, är väl kända eftersom positionen som mäts är den för GNSS-antennen. Denna behöver räknas om till positionen för skanningsenheten för att kunna georeferera reflektionspunkterna. Därför skapas ett internt koordinatsystem där inbördes lägen mellan GNSS-antenn, tröghetssystem och skanningsenhet bestäms.



Figur 15.3. Visar komponenterna i ett flygbaserat laserskanningssystem. Baserad på Vosselman & Maas (2010).

GNSS-antennen placeras på ovansidan av flygplanet för att tillåta fri sikt mot satelliterna. Tröghetssystem och skanningsenhet placeras oftast så nära varandra som möjligt på en plattform. Denna behöver vara mycket stabil för att undvika deformationer som påverkar komponenternas inbördes lägen och vinklar; eftersom tröghetssystemets uppgift är att registrera skanningsenhetens rörelser kan man införa onödiga felkällor som beror på vibrationer eller rörelser i själva plattformen om de placeras långt ifrån varandra. Det är även viktigt att bestämma hur skanningsenhetens och tröghetssystemets koordinataxlar förhåller sig till varandra eftersom det inte går att montera dessa så att de blir helt parallella. Detta görs vanligtvis genom en kalibreringsflygning som genomförs med jämna mellanrum för att kompensera för eventuella kvarvarande fel eller temporära förändringar.

Kontrollenheten sköter kontrollen av systemet, tidssynkronisering och datalagring. Tidssynkronisering görs vanligtvis med hjälp av en PPS-signal (Puls Per Sekund) från GNSS-mottagaren. Mängden data som lagras är stor. Moderna laserskanningssystem, vilka kan generera upp till 300 000 pulser per sekund, producerar runt 20 Gb data per timme. GNSS- och tröghetsdata ger ca 0,1 Gb under samma tid.

15.3.1 Bestämning av skanningsenhetens position

För högsta kvalitet i mätningarna används tvåfrekvens GNSS-mottagare och relativ fasmätning med stöd av referensstationer (se kapitel 10 - 0). GNSS-mätningarna görs inte i realtid utan istället används efterberäknade satellitbanor. Referensstation(er) kan

antingen vara en tillfällig GNSS-mottagare placerad i det område som ska laserskannas eller en fast referensstation, exempelvis SWEPOS i Sverige (avsnitt 11.4). Osäkerheten i de GNSS-mätta positionerna beror på avståndet till referensstationen. För mindre osäkerhet kan ett nätverk av flera referensstationer användas. När en temporär referensstation används kan den placeras på en optimal plats för det specifika projektet och på så sätt minska mätosäkerheten.

Det är viktigt att hålla låsningen mot satelliterna under hela flygningen för att periodobekanta ska kunna lösas med hög precision. Bibehållen satellitkontakt underlättar även integration av GNSS-data med data från tröghetsnavigeringen, i fortsättningen benämnda TN-data. Förlorad låsning mot satelliterna kan kompenseras med TN-data, men endast om den förlorade kontakten är kort, annars riskerar driften i tröghetssystemet att bli för hög. Periodobekanta kan bestämmas på marken innan flygningen och sedan försöker man bibehålla satellitkontakten under hela flygningen. Detta är dock svårt eftersom det kräver att flygplanet ligger så horisontellt som möjligt under hela uppdraget. Istället har metoder att bestämma periodobekanta i realtid utvecklats (jfr on-the-fly-metoder i avsnitt 11.3).

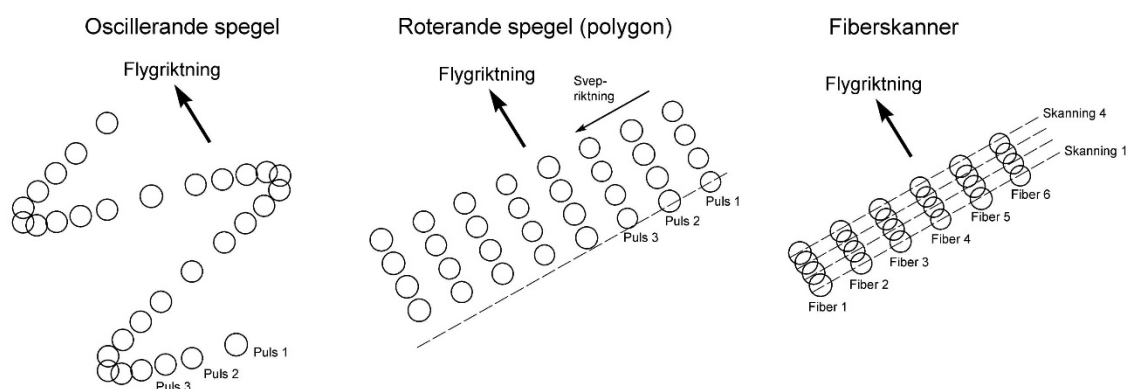
15.3.2 Bestämning av laserpulsens riktning

Tröghetsnavigering används för att bestämma sensorns riktning. Det är en navigationsteknik som bygger på kontinuerlig mätning av accelerationer och vinkelförändringar; dessa mäts med hjälp av accelerometrar och gyroskop. Med hjälp av dessa data bestäms position och riktning i förhållande till en startpunkt med känd position, orientering (riktning) och hastighet. Tröghetsinstrumentet består vanligtvis av tre ortogonala gyroskop, som mäter vinkelhastighet, och tre ortogonala accelerometrar som mäter linjär acceleration. Instrumentet är oftast inbäddat i ett tröghetsnavigeringssystem, i detta kapitel benämnt tröghetssystem, som processar rådata från tröghetsinstrumentet till orienteringsdata. Det finns två i princip skilda varianter av tröghetssystem. Det ena är ett upphängt system vilket är monterat så att det hålls fixerat i ett yttre referenssystem. Vid georeferering av data är det vanligast att använda den andra typen, fast monterat tröghetssystem, vilket innebär att systemet är fast monterat vid den utrustning det ska mäta position och riktning för, dvs. skanningsenheten. Eftersom systemet är fast monterat mäts vinklar och acceleration i ett internt koordinatsystem i förhållande till initieringsläget och inte direkt i ett yttre referenssystem.

Tröghetssystemets mätningar innehåller fel som driver och växer med tiden. Därför måste det initieras med jämna mellanrum vilket gör att flygstråkens längd begränsas. Initieringen kan göras i luften genom att provocera fram accelerationer vid svängar och därvid jämföra GNSS och tröghetsmätningar. Hur ofta detta måste ske beror på hur data från tröghetssystemet och GNSS-data integreras, samt vilket tröghetssystem som används. Även avvikelser i gravitation kan vara en felkälla. Detta eftersom accelerationen inte enbart beror på plattformens rörelser utan även gravitation och krafter som härrör från jordens rotation. Vissa av dessa fel kan modelleras och kompenseras för med hjälp av referensdata från GNSS.

Det är inte enbart skanningsenhetens lutning som bestämmer laserpulsens riktning. Eftersom skannern gör så att pulserna sänds ut med olika vinklar för att täcka ett större område under flygplanet beror riktningen på pulsen både på skanningsenhetens riktning och på vinkeln den sänds ut med. För närvarande finns det tre olika komponenter som används för att styra laserstrålens riktning: oscillerande spegel, roterande spegel och

fiberskanner. En oscillerande spegel är en spegel som oscillerar mellan två positioner och som gör att laserpulserna sveper över marken enligt Figur 15.4. Zigzag-mönstret beror på att flygplanet hela tiden rör sig framåt, och de kortare avstånden mellan laserpulserna i ytterkanterna beror på att spegeln saktar in och byter riktning innan den sveper tillbaka åt andra hållet. En roterande spegel är ofta en polygonformad spegel. I motsats till en oscillerande spegel görs alla svep i samma riktning. Mönstret påminner om en fiberskanner men eftersom flygplanet hela tiden rör sig framåt sänds inte pulserna ut längs en linje som är ortogonal mot flygriktningen. En fiberskanner är slutligen en skanner som är uppbyggd av en rad med fibrer som sänder ut laserpulserna och tar emot reflektionerna. Skanningsmönstret blir en rad med pulser, där antalet pulser är lika med antalet fibrer enligt Figur 15.4.



Figur 15.4. Visar hur skanningsmönstret ser ut för en oscillerande spegel (vänster) roterande polygonspegel (mitten) samt en fiberskanner (höger). Baserad på Vosselman & Maas (2010) samt Katzenbeisser (2003).

15.3.3 Bestämning av avståndet till reflektionspunkten

Avståndet från sensorn till en reflektionspunkt bestäms genom att mäta tiden från det att en laserpuls sänds ut, tills att den returneras. Hur den reflekterade ljuspulsen tolkas är därför av grundläggande betydelse. Det finns olika metoder att bestämma vad som avgör när en puls ska registreras av skanningssystemet. Ofta är det dolt för användaren av systemet exakt hur detta görs men det finns några vanliga metoder. Exempelvis kan tiden registreras vid en puls maximala intensitet. En annan metod registrerar tiden då intensiteten i en reflektion överstiger ett bestämt tröskelvärde, medan en tredje metod innebär att tiden mäts då reflektionens intensitet når en viss andel av pulsens maximala intensitet, vanligtvis 50%. Den sista metoden har visat sig ge bra resultat.

Hur stort avståndet måste vara mellan olika objekt för att de ska kunna identifieras var för sig beror på laserpulsens längd. Är exempelvis pulsen 5 ns lång, krävs ett avstånd på 0,75 m mellan olika objekt för att de ska kunna särskiljas.

15.3.4 Felkällor

Det finns ett flertal felkällor som påverkar resultatet vid laserskanning.

Skanningsenhetens position: Satellitpositioneringen ger av olika anledningar dels ett slumpmässigt brus, men framför allt systematiska effekter som är korrelerade under kortare tidsrymder. Dessa ger vanligtvis en positioneringsosäkerhet på 0,05–0,20 m.

Laserpulsens riktning: Tröghetsnavigeringen ger små vinkelfel, vilka fortplantas till positionsfel, speciellt i plan men också i höjd. Osäkerheten ökar med ökad flyghöjd och kan på marken typiskt uppgå till 0,10–1,00 m (högre värden i plan än i höjd).

Skannerspegelns rörelse måste bestämmas med mycket hög precision. Detta medför ofta en liten felkälla, speciellt om oscillerande speglar används, då mycket snabba retardationer och accelerationer måste mätas upp. Den mätosäkerhet som detta ger upphov till är förhoppningsvis liten men kan i värsta fall om speglarna inte är kalibrerade ytterligare försämra positioneringen med några centimeter.

Avstånd till reflektionspunkten: Längdmätningen påverkas dels av systematiska fel som ofta beror på felkällor som inte är kalibrerade för, men också tillfälliga fel. En felkälla är att ljusets hastighet inte är konstant i luft utan beror på tryck, fuktighet och temperatur, vilket behöver korrigeras för. Mätosäkerheten beror även på signal/brusförhållandet i reflektionen. Intensivt bakgrundsljus (exempelvis reflektion av starkt solljus) kan ge ett lågt signal/brus-förhållande som påverkar mätosäkerheten, speciellt om reflektionen är svag. Det betyder t.ex. att nylagd svart asfalt som knappt ger någon reflektion alls genererar en sämre längdmätning än en ljusare, äldre asfaltsyta. Detta innebär att flyghöjden måste anpassas till styrkan på lasern så att inte alla reflektioner blir för svaga. Denna felkälla genererar typiskt en mätosäkerhet på 0,02–0,20 m. Även objektets form och lutning påverkar mätosäkerheten. Det är en fördel om objektet reflekterar en hög andel av pulsen mot skanningsenheten istället för att sprida den, eller reflekterade den bort från laserskannern. Likaså krävs att osäkerheten i tidsmätningen är liten för att inte ge felaktiga avstånd. För de flesta skanningssystem anger tillverkaren olika korrektioner som ska appliceras på längdmätningen. Dessa bestäms vanligtvis vid speciella kalibreringar och tillhandahålls av tillverkaren. Det kan t ex vara en tabell som anger hur mycket en längdmätning ska korrigeras beroende på avstånd till objektet.

Övriga felkällor: Mätosäkerheten kan även påverkas av brister i tidssynkroniseringen vilket exempelvis kan göra att tiden för en viss position bestämd med GNSS inte är den som skanningsenheten befann sig i när en laserpuls sändes ut. Det kan även vara bristande intern kalibrering (t.ex. bestämning av GNSS-antennens läge). Detta bör dock ha tagits hand om av systemleverantören, antingen genom en redan utförd kalibrering eller genom väldefinierade instruktioner om hur denna ska göras eller kontrolleras.

I många fall är det svårt att särskilja alla felkällor utan dessa tas om hand om i en slutlig utjämnning och inpassning på kända punkter vilket beskrivs i avsnitt 15.5.3.

15.4 Viktiga begrepp vid flygburen laserskanning

Flyghöjd: Flyghöjden är viktig för slutresultatet vid laserskanning. Vid högre flyghöjd kan ett större område täckas på kortare tid, vilket ger ekonomiska fördelar. Det finns dock nackdelar med att flyga högt. Mätosäkerheten blir högre och *punkttätheten* (se nedan) påverkas negativt. Dessutom minskas mängden energi som återvänder till sensorn kvadratisk mot ökad flyghöjd.

Punkttäthet: Punkttätheten anger avståndet mellan laserpulserna på marken. Se Figur 15.4 där en schematisk bild av skanningsmönster och punkttäthet vid skanning med oscillerande spegel, roterande spegel och fiberskanner visas. Punkttäthet är tillsammans med mätosäkerheten den viktigaste parametern vid FLS. Är punkttätheten hög förbättras den rumsliga upplösningen. Det gör att mindre objekt kan identifieras och topografien kan avbildas mer detaljerat. En låg punkttäthet innebär att det blir större områden som inte träffas av någon laserpuls och därmed större andel av det skannade området där inga data samlas in.

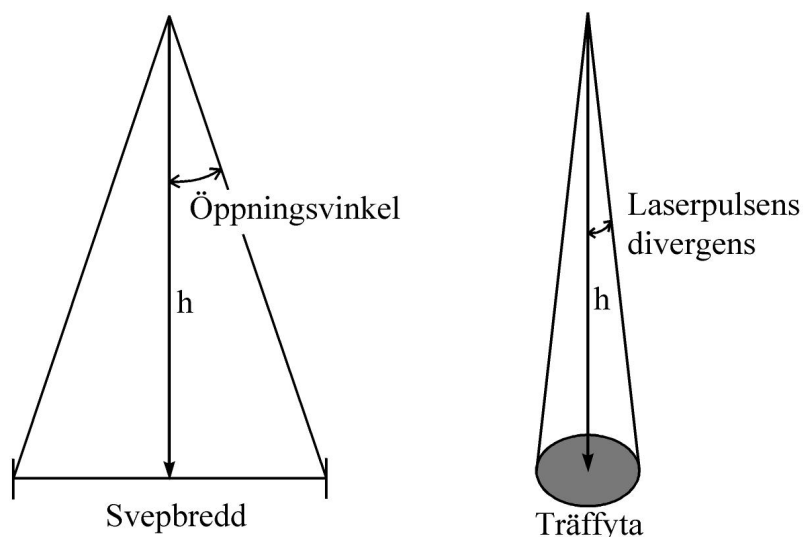
Träffyta *Träffytan* (Figur 15.5) är ytan som laserpulsen täcker då den når marken. En mindre träffyta gör det enklare att tolka markens form eftersom det ger en högre rumslig

upplösning. Speciellt i kuperade områden är träffytans storlek viktig. Träffytans storlek ökar med ökad flyghöjd.

Pulsfrekvens: *Pulsfrekvens* är antalet pulser per tidsenhet som sensorn sänder ut. En hög frekvens ger hög punkttäthet vilket är en fördel (se ovan). Det finns dock begränsningar i hur hög frekvens som är möjlig; dels rent tekniska som bestämmer hur hög frekvens som kan erhållas, dels det faktum att innan en ny puls kan sändas ut måste reflektionen från den förra ha nått sensorn. I annat fall går det inte veta från vilken puls reflektionerna härstammar. Detta gör att högre flyghöjd inte tillåter lika hög frekvens som lägre flygningar.

Skanningsfrekvens: *Skanningsfrekvens* är antalet varv, vändningar eller upprepade rörelser som den skannande enheten gör per sekund. Om en roterande spegel roterar 200 varv per sekund är skanningsfrekvensen 200 Hz. Skanningsfrekvensen i kombination med pulsfrekvens, flyghöjd och flyghastighet avgör punkternas fördelning på marken.

Öppningsvinkel och svepbredd: *Öppningsvinkel* är den maximala vinkeln mellan laserpulsens riktning och lodlinjen och *svepbredden* anger hur brett område under flygplanet som täcks av en laserskanner med en specifik öppningsvinkel (Figur 15.5). En ökad svepbredd gör att ett större område kan täckas. Nackdelen är att bredare svep kräver en större öppningsvinkel vilket gör det svårare för laserpulser att nå marken i skog eller tätare bebyggelse. Detta eftersom det är större chans för en puls att nå marken om den vinklas rakt nedåt. Vanligtvis används en öppningsvinkel på 15–20°.



Figur 15.5. Öppningsvinkel, svepbredd och träffyta.

Reflektionernas intensitet: I skanningsenheten kan intensiteten (Figur 15.2) i varje reflektion bestämmas. Denna visar hur stor andel av pulsen som returneras i varje retur. Intensiteten kan användas till tolkning av vissa objekt, som skogsbilvägar. Dock härstammar intensiteten enbart från ett våglängdsområde och innehåller förhållandevis mycket brus. Markupplösningen är också låg vilket gör att informationen som kan fås är begränsad. System som kan registrera reflektionerna i vågform ger bättre möjligheter att identifiera föremål ovan mark.

Stråk: Ett stråk är en överflygning av området som ska laserskannas (Figur 15.9). Data

för ett stråk hanteras som en enhet med start- och slutpunkt som bestäms vid flygplaneringen. Stråken planeras så att hela området täcks. Vanligtvis är överlappningen mellan stråken 20% och flygriktningen är motsatt för två grannstråk. Bredden på ett stråk är densamma som svepbredden och bestäms av öppningsvinkeln.

Stråkutjämnning: Georeferering av laserdata görs med hjälp av GNSS- och TN-data. Eftersom dessa ger en viss mätosäkerhet görs en *stråkutjämnning*, vilket innebär att man förbättra orienteringsdata genom att minimera avvikelser mellan överlappande stråk (kap 16.5.3). På detta sätt får man ett sammanhängande punktmoln som dessutom kan passas in mot kända punkter för ännu högre mätsäkerhet.

15.5 Praktisk mätning med flygburen laserskanning

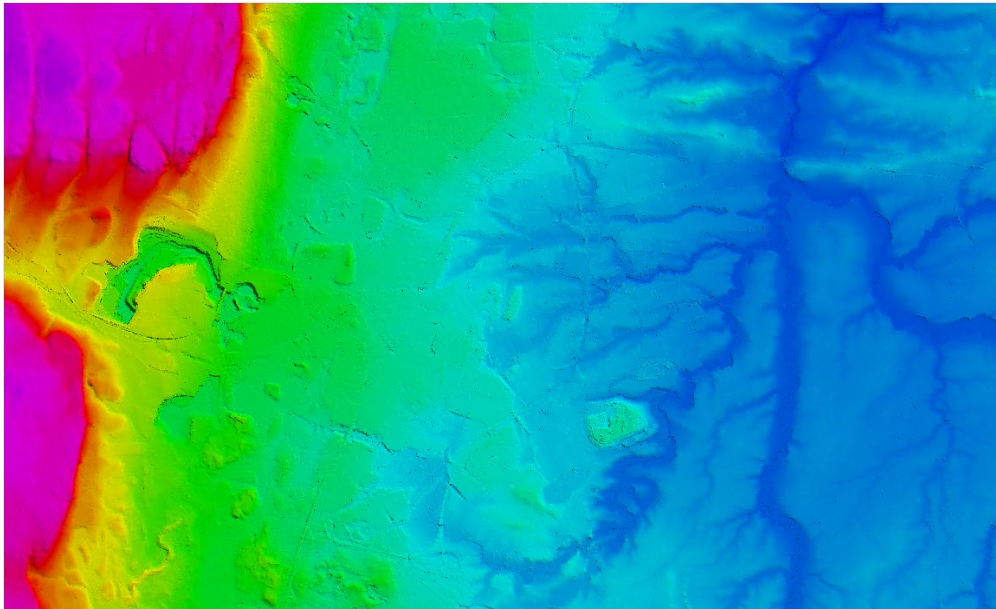
15.5.1 Tillämpningar av flygburen laserskanning

De senaste åren har antalet tillämpningar av FLS ökat markant. Skanningar görs i många olika syften och upplösningar, från flyghöjder lägre än 200 meter till högre än 2000 meter.

Ett landsomfattande projekt i Sverige där FLS används är de nationella höjdmodellerna, vilka Lantmäteriet har i uppdrag att ta fram. Ursprungligen var framtagandet av dessa modeller ett resultat av klimat- och sårbarhetsutredningen som gjordes av miljödepartementet. Utredningen kom fram till att höjddata av högre kvalitet än den vid undersökningen tillgängliga behövs för att beräkna sårbarheten p.g.a. framtida klimatförändringar. Bl.a. är det viktigt att kunna göra noggranna hydrologiska modeller för att beräkna översvämningsrisker eller beräkna risken för ras och skred. I stället för den gamla höjdmodellen med 50 meter mellan punkterna produceras en digital höjdmodell med 2 meter mellan punkterna. Numer finns det även andra nationella höjdmodeller med ännu högre geometrisk upplösning.

Ett annat användningsområde för FLS är inom skogsindustrin. Eftersom en laserskanning ger reflektioner både från markytan och objekt ovan mark kan trädhöjden mätas samt timmervolym och biomassa beräknas. Andra projekt som täcker stora områden kan vara laserskanning av älvdalar för flödesberäkningar eller projektering av vindkraftverk. Även vid planering av antennplacering för telekommunikation används 3D-modeller.

På kommunal nivå används laserskanning för att ta fram höjdmodeller och 3D-modeller över hela eller delar av kommunen (Figur 15.6 och Figur 15.7). Höjdmodeller kan t ex användas för att ta fram höjdkurvor. 3D-modeller kan användas till stadsplanering, visualisering av urbana områden eller GIS-tillämpningar som bullerutbredning och siktmodellering. Även mindre områden skannas i syfte att samla in projekteringsunderlag vid exploatering eller för massberäkning av soptippar, dagbrott och liknande.

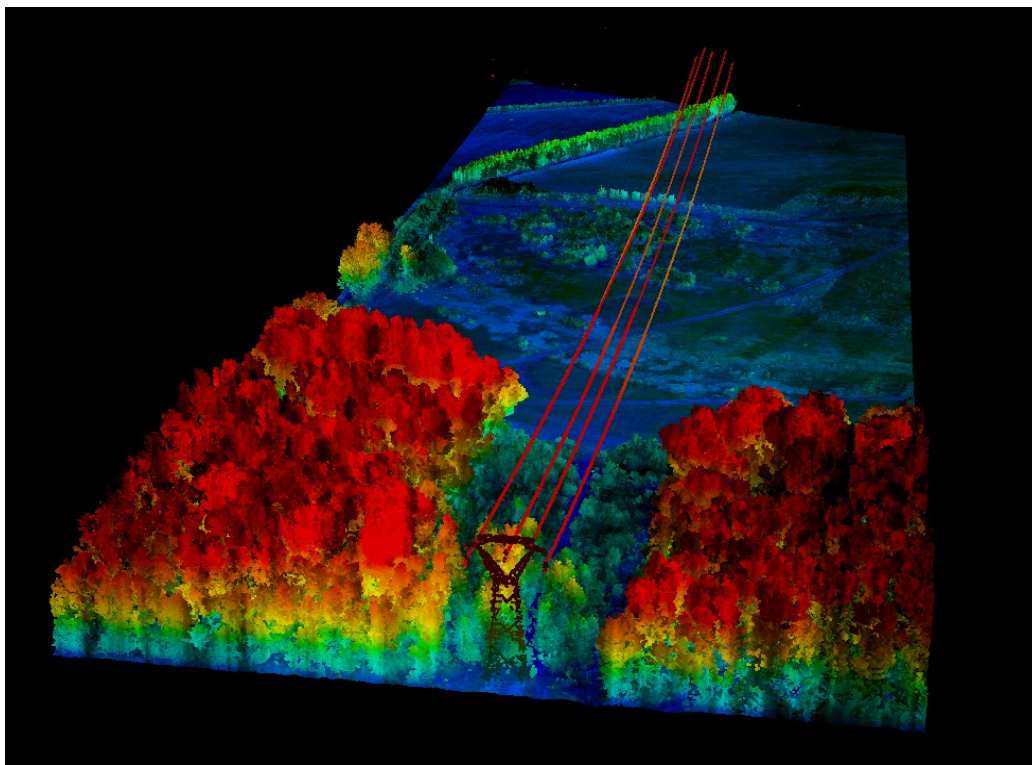


Figur 15.6. Höjdmmodell över delar av Skövde kommun (framtagen av Blom).



Figur 15.7. 3D-modell över Helsingfors tekniska högskola från flygning med laserskanner och kamera. Träd, hus och mark framtolkat från laserdata. Ortofoto från flygning draperat på höjdmmodell från laser. På bilden är alla laserpunkter ersatta med CAD-objekt (bilden framtagen av Terrasolid Oy).

Helikopterburna laserskanningssystem är speciellt lämpliga för linjeobjekt som vägar, järnvägar, kraftledningar eller pipelines (Figur 15.8). Laserskanningen sker då oftast på låg höjd med hög punkttäthet. Oftast kompletteras lasersystemet med en digital kamera för att även samla in digital bildinformation under flygningen. Från ett sådant material kan man göra högupplösta ortofoton, höjdsatta vektorkartor, 3D-modeller med fototexturer, visualiseringar mm.



Figur 15.8. Bild framtagen inom ett kraftledningsprojekt i Frankrike med hjälp av helikopterburen laserskanning (framtagen av Blom).

15.5.2 Planering vid flygburen laserskanning

Inställningar av laserskannern

Vid planeringen behöver först inställningar av laserskannern göras beroende på projektets kravspecifikation och skannerns prestanda. Vanligtvis tillhandahåller tillverkaren av skannern program för det ändamålet som räknar ut punkttäthet, svepbredd mm. beroende på indata såsom flyghöjd, flyghastighet och öppningsvinkel. Val av öppningsvinkel är speciellt viktigt. Ur ekonomisk synpunkt ska vinkeln vara så stor som möjligt eftersom det ger en stor svepbredd som i sin tur innebär att ett mindre antal stråk behöver flygas. Därför väljs den största vinkel som ger tillräckligt liten mätosäkerhet för att möta projektets krav. Hur stor öppningsvinkel som kan väljas beror exempelvis på topografin. I flack terräng kan en större vinkel användas än i brantare terräng. Även objekt ovan mark påverkar hur stor öppningsvinkel som kan användas. I exempelvis städer där flera pulser reflekteras mot byggnader istället för mot marken gör en mindre öppningsvinkel att fler pulser når marken. Detsamma gäller för exempelvis tät skog där det är större risk att en stor del av pulsen (energin) reflekteras i grenverket, istället för mot markytan, med stor öppningsvinkel.

Flyghöjden påverkar också flera parametrar på liknande sätt som öppningsvinkeln. Högre flyghöjd ger bredare stråk vilket är önskvärt ur ekonomisk synvinkel, men som nämnts tidigare medför en högre flyghöjd flera nackdelar som lägre punkttäthet, högre mätosäkerhet och mindre energi i reflektionerna. Även träffytan blir större vilket gör att detaljer måste vara större för att kunna urskiljas i data.

Yttre förhållanden

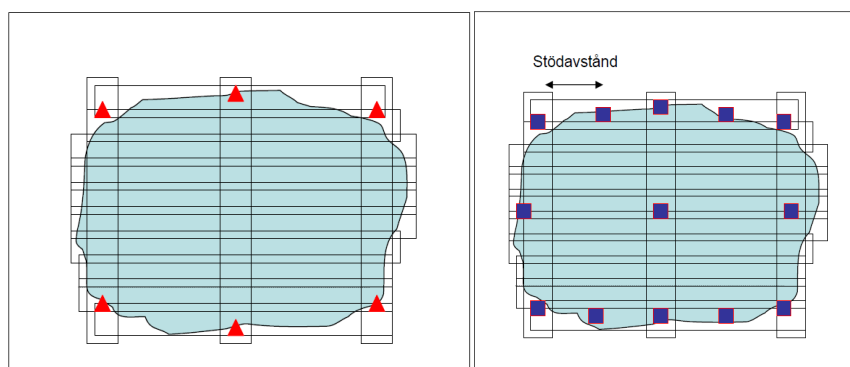
Kvaliteten i laserdata påverkas även av väderförhållandena. Om det ligger kvar vattenpölar och marken är fuktig efter regn påverkas punkttätheten. Detta beror på att

vattenpölarne kan reflektera bort laserpulsen från sensorn så att ingen retur registreras, och att vissa markslag absorberar pulsen då de är fuktiga. Om det ligger snö i området reflekteras laserpulserna på snön istället för på marken.

Antalet laserpulser som når marken reduceras av tät vegetation. Olika vegetationstyper ger olika effekt på genomträngligheten. Det har gjorts undersökning där laserskannade data jämförts med andra höjddata, som pekar på medelavvikelser på 5–20 cm, beroende på typ av markvegetation. I samtliga fall har det varit laserdata som legat högst. Vid vegetation som är tät högt ovan mark, som exempelvis bokskog, är ofta punkttätheten låg vid marken, men de punkter som registreras har ofta liten osäkerhet. Detta beror bl.a. på att träden släpper igenom mindre ljus, vilket gör att markvegetationen är gles. På motsatt sätt kan vegetation som är mer öppen högre upp, och som därigenom släpper ner mer ljus till marknivån, göra att markvegetationen bildar ett tätt täcke som laserpulserna inte kan tränga igenom. Laserdata kan då få hög punkttäthet i marknivå, men ha stor mätosäkerhet. Detta eftersom det inte är marken laserpulserna når utan de reflekteras på toppen av den täta markvegetationen. Även öppna ytor som ängsmark och åkermark kan ha ett vegetationstäck som inte laserpulserna kan tränga igenom. För att få så bra resultat som möjligt är det därför lämpligt att utföra skanningen vid en årstid då vegetationen ännu inte vuxit upp eller har vissnat för säsongen.

Stråk, plan- och höjdstöd

Vid laserskanning samlas data in genom att flyga över området i stråk. Dessa stråk sätts sedan tillsammans till ett s.k. block av data som täcker hela det skannade området. Som nämnts tidigare avgörs den maximala längden på ett enskilt stråk av tröghetssystemets drift. För att kunna kontrollera systematiska fel och driften i tröghetssystem och satellitpositionering bör även tvärstråk flygas i varje ända av stråken. Är stråken långa bör dessutom tvärstråk flygas i mitten (Figur 15.9). Initieringen av tröghetssystemet kan göras genom tvära svängar mellan två stråk (jfr avsnitt 15.3.2).

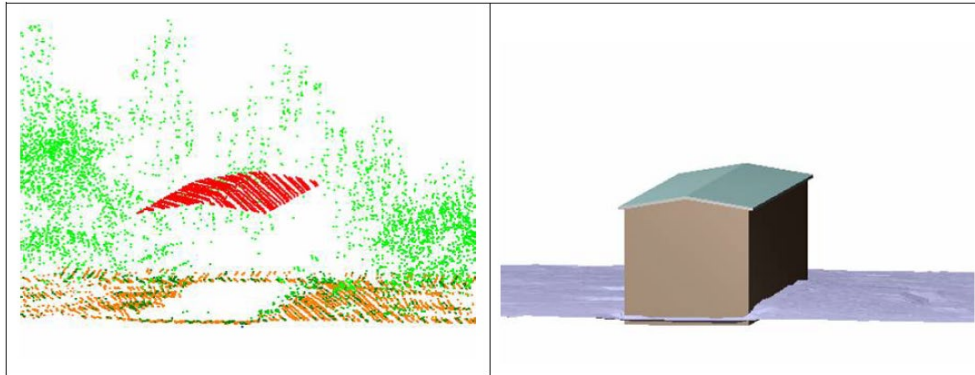


Figur 15.9. Flygstråk vid laserskanning samt placering av planstöd (vänster) och höjdstöd (höger). Källa: Lantmäteriet.

Planstöd används till att passa in laserdata i plan i ett geodetiskt referenssystem. Stöden kan utgöras av kartmaterial om sådant finns tillgängligt av tillräcklig hög kvalitet. I annat fall kan stöden mätas in. Det är viktigt att planstöden utgörs av objekt som enkelt kan urskiljas i laserdata. Eftersom laserdata utgörs av ett förhållandevis gles punktmoln är det vanligt att information som hustak o.d. behöver extraheras för att kunna jämföra med referensdata (Figur 15.10). Terrängprofiler med karaktäristiska drag i terrängen som kan identifieras i laserdata, t ex slänter och diken, är också användbara för planinpassning. Det är också möjligt att utnyttja intensitetsinformationen i laserdata i de fall vägkanter och målade vägdetaljer kan urskiljas. Planstöd bör placeras i ändarna av stråken samt i ändarna av tvärstråken. Hur tätt de behöver placeras beror på driften

i tröghetssystemet.

Höjdstöd används för att passa in laserdata i höjd. De placeras på liknande sätt som planstöden men vid större projekt bör kompletterande höjdstöd placeras emellan de övriga (Figur 15.9). Höjdstöden mäts in på öppna ytor som är så plana som möjligt. Punkterna behöver inte representeras av något specifikt objekt i verkligheten. Det viktiga är att välja en yta med ett underlag där laserskanningen ger liten mätosäkerhet. Lämpliga ytor är asfalt, betong eller grus.



Figur 15.10. Punktmoln där punkter har klassats bl.a. som mark, vegetation och hustak (vänster) samt en modell av huset (höger). Källa: Lantmäteriet.

15.5.3 Beräkningar vid flygburen laserskanning

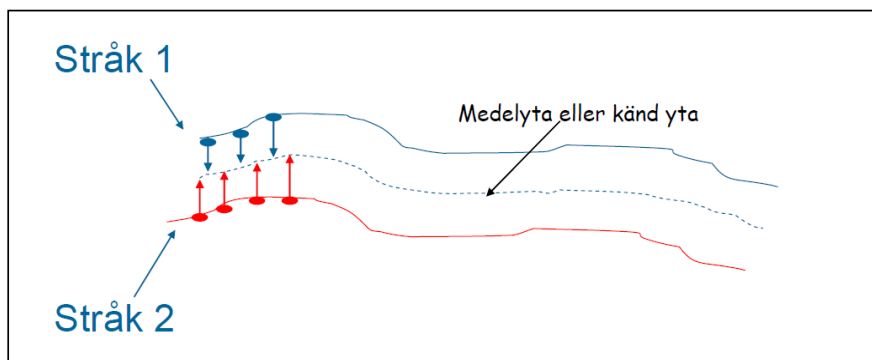
Integrering av GNSS och tröghetsdata

Laserskannern ger hög precision i mätningarna av avstånd men för att kunna georeferera punkterna med minimal osäkerhet krävs att skanningsenhetens position och riktning är känd för varje laserpuls. För det måste banan som flygplanet flugit rekonstrueras. Det första steget är att korrigera GNSS-data med data från referensstationerna. Detta ger positioner med liten mätosäkerhet och jämna intervall, men de diskreta mätningarna är inte tillräckligt täta för att kontinuerligt bestämma flygplanets position och rotation kring koordinatsystemets 3 axlar (X , Y , Z). Som exempel ger en flyghastighet av 70 m/s och ett insamlingsintervall för GNSS:n på 2 Hz ett avstånd på 35 m mellan positionerna. För att få en kontinuerlig beskrivning av flygplanets bana integreras därför GNSS- och TN-data. TN-data har vanligtvis ett insamlingsintervall på 200 Hz för position och vridning runt de 3 axlarna. Vid integrationen utnyttjas de noggrant inmätta GNSS-positionerna för att kompensera för driften i tröghetssystemet och den högre frekvensen för tröghetssystemet gör att en kontinuerlig beskrivning av flygplanets bana kan beräknas. När flygbanan är återskapad kan georeferering av laserdata göras. Här är tidssynkroniseringen viktigt för att säkerställa att position och riktning för skanningsenheten verkligen stämmer med den då pulsen sändes ut.

Stråkutjämnning

För att få lägsta osäkerhet i insamlade data hade det optimala varit att utvärdera laserdata mot inmätta objekt på marken stråk för stråk men det är inte ekonomiskt försvarbart. Istället kan man mäta avvikelser mellan överlappande stråk genom att jämföra deras inbördes lägen och på så sätt bestämma och kompensera för kvarvarande fel. Detta kallas stråkutjämnning. Höjd- och plandifferenser mellan stråk mäts och modelleras, och genom korrektioner av orienteringsparametrar kan en bättre inpassning uppnås (Figur 15.11). Genom att stråken utjämnas på detta vis minimeras avvikelser

mellan närliggande stråk, och de tvärgående stråken gör att samtliga stråk binds samman med minimala avvikelser. På det sättet ger plan- och höjdstöd placerade enligt Figur 15.9 liten mätosäkerhet och sparar mycket arbete jämfört med att använda stöd till varje stråk vilket skulle kräva ett mycket större antal stödpunkter.



Figur 15.11. Visar två överlappande stråk innan stråkutjämning gjorts (heldragna linjer) och korrigeringsarna (pilar) för att utjämna stråken. Källa: Lantmäteriet.

För att göra stråkutjämnningen tas temporära höjdmodeller fram för varje stråk. I dessa mäts höjd- och plandifferenserna som används vid modellering av korrektionerna av orienteringsdata. Detta kan även kompletteras med mätningar på hustak eller andra distinkta och väldefinierade objekt. Utjämnningen sker i två steg:

Steg 1 - Global utjämning

Vid en global utjämning tar man hand om vinkelfel som är systematiska för hela datasetet. Datasetet utgörs oftast av alla stråk som tillhör en separat flygning över ett sammanhängande område. De fel som modelleras kan vara kvarvarande kalibreringsfel, men också fel som tillkommit vid initieringen av tröghetssystem vid flygningens början.

Steg 2 - Stråkvis utjämning

Vid den stråkvisa utjämnningen tar man hand om positions- och vinkelfel som är systematiska för de enskilda stråken. Dessa fel har oftast uppkommit vid satellitpositioneringen och tröghetsnavigeringen, men de förändrar sig över flygningen så att nya korrektioner kan behöva göras för varje stråk. Det kan även finnas ytterligare förändringar inom ett och samma stråk men oftast har stråkens längd begränsats redan vid planeringen för att minimera dessa.

Plan- och höjdinpassning

När stråkutjämnningen har gjorts har man ett sammanhängande punktmoln som passas in i plan och höjd med hjälp av stödpunkter. Det är viktigt att tänka på att höjdinpassningen bör göras efter, eller i samband med planinpassningen. I annat fall är det risk att höjden passas in i fel planposition.

Markklassning

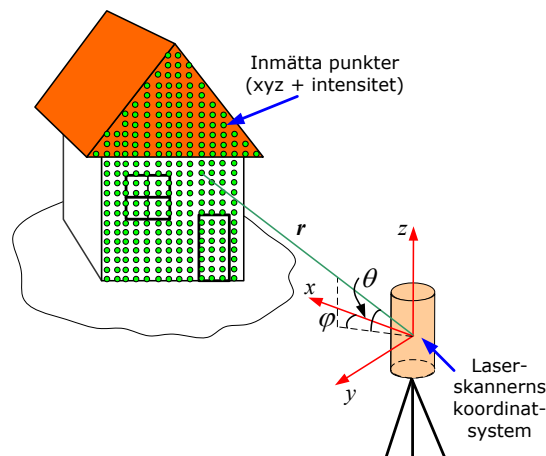
Resultatet av ovanstående korrigeringar blir ett punktmoln liknande den i Figur 15.10. Hur vidare bearbetning görs beror på vad data ska användas till. Vid framtagning av höjdmodell är det enbart de punkter som härstammar från reflektion mot markytan som är intressanta. För att få fram dessa görs någon form av markklassning så att marken skiljs från övriga objekt. Denna kan delvis göras automatiskt men även manuell bearbetning krävs. Exempelvis är det svårt att skilja broar från mark. För icke-mark är det möjligt att göra ytterligare klassning (som i Figur 15.10) för att exempelvis

identifiera byggnader och vegetation.

15.6 Principen för terrester laserskanning

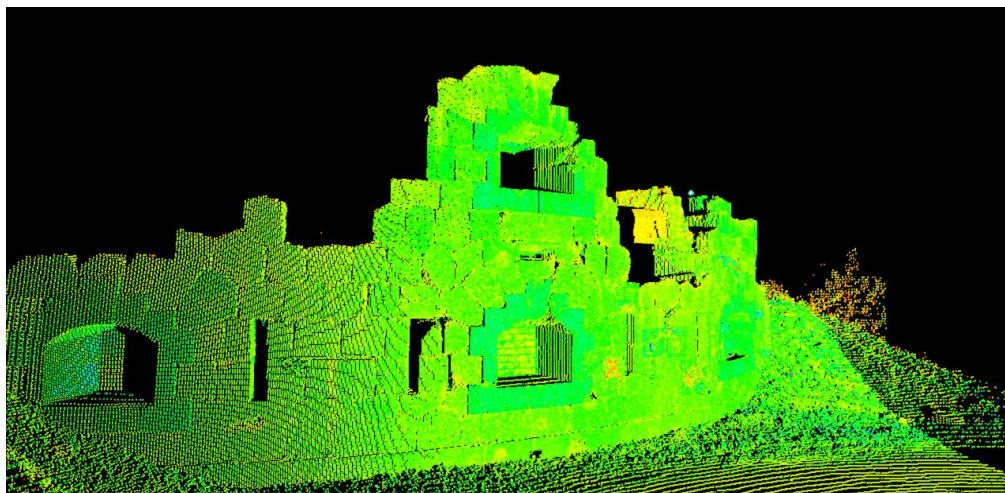
Terrester laserskanning (TLS) är en teknik för 3D-dokumentation av olika objekt eller kompletta miljöer från marken, och den baseras på ungefär samma princip som dess flygburna motpart. Avståndet från instrumentet – en terrester laserskanner – till en punkt på objektets yta bestäms med hög noggrannhet genom att mäta tiden (direkt eller indirekt, se avsnitt 15.7 för mera detaljer) det tar för en lasersignal att färdas till objektet och tillbaka till skannern. Den tiden kallas löptid (eng. time-of-flight). Objektet skannas, med hjälp av en optomekanisk skanner, i horisontal- och vertikalled, med hastighet av från tusentals till hundratusentals punkter per sekund. Till skillnad från FLS är en terrester laserskanner statisk under mätningen (dvs. den ändrar inte sin position och orientering). Laserstrålens horisontala riktning (φ) och vertikala vinkel (θ) i varje punkt mäts, vilket tillsammans med avståndet (r) ger tre observationer. Ytterligare registreras intensiteten av den reflekterade lasersignalen i varje punkt, liksom i FLS, vilken är alltså den fjärde observationen. Utifrån de tre första observationerna kan punktens kartesiska koordinater (x , y , z) i skannerns koordinatsystem beräknas enligt följande (se även Figur 15.12):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix} \quad 16.1$$



Figur 15.12. Principen för TLS och laserskannerns observationer (baserad på Staiger, 2003).

Resultatet av en sådan skanning blir en högdetaljerad 3D-bild av objektet bestående av tusentals till miljontals koordinatbestämda punkter, som kallas ”punktmoln”, precis som i FLS. Ofta kallas punkterna i punktmolnet ”laserreturer”. Ett exempel av punktmoln ges i Figur 15.13.



Figur 15.13. Exempel av ett punktmoln från TLS, i detta fall – över ev del av Brännklintstornet vid Bomarsunds fästning på Åland. Punkterna är färgade enligt intensiteten.

Det är klart från ovanstående beskrivning att en laserskanner fungerar ganska likt en reflektorlös totalstation. Avståndsmätningar görs på samma sätt som i det sista, och förflyttningar av laserstrålen motsvarar avläsningar på horisontal- och vertikalcirkel. Helt annorlunda är datainsamlingstakten. Det bör också nämnas att vissa moderna totalstationer har en ”skanningsfunktion”, dvs. de kan programmeras att förflytta kikaren med jämna steg i vertikal- och horisontalled, och mäta in punkter automatiskt. Skanningshastigheten är dock vanligen ett fåtal punkter per sekund, vilket är mycket lägre än i TLS.

Eftersom objekt som mäts med TLS är ofta stora och kan ha en komplicerad form, behöver man göra en serie av skanningar från olika positioner för att ”fånga” objektets kompletta geometri. För att uppnå en komplett 3D-representation av objektet ska de skanningarna slås ihop (*registreras*) till *ett* punktmoln, och transformeras till ett yttre (geodetiskt) koordinatsystem (*georefereras*). Det sista är mycket viktigt för att kunna integrera TLS-data med andra rumsliga data (t.ex. GNSS-mätningar). Därefter kan man utföra 3D-modellering av det inmätta objektet, och 3D-modellen kan exporteras t.ex. till ett CAD-program och användas för olika ändamål. I avsnitt 15.8 kommer de ovannämnda databearbetningsstegen att behandlas i mera detaljer.

Den främsta fördelen med TLS, jämfört med ”traditionella” mätningstekniker – t.ex. totalstation och GNSS – är dess möjlighet att dokumentera objekt i 3D direkt, snabbt, noggrant och med hög detaljnivå. Andra fördelar är:

- Drastisk reduktion av kostnader och snabbare genomförande av projekt;
- Möjlighet för fjärrmätning av mycket komplicerade, icke-tillgängliga och farliga objekt och områden;
- Inget krav på belysning under mätningar: det går att skanna även i mörkret;
- Fullständighet av skanningen: ”allt” dokumenteras på en gång. Därför behöver man inte återkomma till objektet om några nya data behövs. Detta även ökar kundens förtroende för resultatet;
- Data kan användas för olika ändamål, både direkt efter skanningen eller i framtiden.

Naturligtvis finns det tillämpningar där ”traditionella” tekniker är mer relevanta än TLS. Därför behöver man alltid göra en kostnadsanalys av TLS innan det bestäms om

denna teknik ska (eller inte ska) användas för ett specifikt uppdrag.

Även om TLS är en mycket kraftig teknik i sig, avslöjar den sin fulla potential i kombination med andra mätningstekniker. Med ett resulterande integrerat mätsystem kan man samla in data som inte är tillgängliga för en terrester laserskanner. Ett av de mest populära exemplen har varit integrering av laserskannrar och digitala kameror. Kameran ger en högupplöst bild (texturmodell), som kan ”draperas” på ett punktmoln eller en 3D-modell skapad utifrån det, för att uppnå en fotorealistisk 3D-representation av objektet. Detta ämne ligger dock utanför ramen för detta kompendium.

15.7 Funktion av en terrester laserskanner

Huvudkomponenterna hos en terrester laserskanner är *laseravståndsmätare*, *laserstråleavböjningsenhet* (eller optomekanisk skanner) och *vinkelmätningssystem*. I de flesta moderna laserskannrar baseras avståndsmätningar på impuls- eller fasskillnadsmetoden (se avsnitt 5.2.1 för detaljerad beskrivning), och går ut på att mäta lasersignalens löptid (avsnitt 15.6). Impulsbaserade (kallas också pulsade) skannrar mäter pulsens löptid direkt. Fasskillnadsbaserade skannrar mäter fasskillnaden mellan utsänd och inkommande signal, vilken är proportionell mot löptiden. Därför kan man säga att tiden mäts indirekt i det sista fallet.

Pulsade laserskannrar kan mäta längre avstånd än de fasskillnadsbaserade (vanligtvis upp till några hundra meter, vissa skannrar kan mäta upp till ca 1 km), men de är mindre noggranna och är betydligt långsammare. I dagsläget (juni 2011) vanligtvis har fasskillnadsbaserade skannrar räckvidd på ca 80 m, men vissa av dem kan ”nä” över 100 m. Skanninghastighet hos pulsade skannrar ligger idag på mellan några tusen och några tiotal tusen punkter per sekund, och hos fasskillnadsbaserade skannrar – vanligtvis på några hundratal tusen punkter per sekund.

Liksom i FLS, påverkas avståndsmätningar av reflektans hos objektets yta. Reflektans definieras som kvoten mellan reflekterad och utsänd laserenergi. Om all utsänd energi reflekteras tillbaka blir reflektansen lika med 1 (eller 100%), och noll om ingen energi returneras. För verkliga ytor ligger reflektans mellan 0 och 1, och den beror på många faktorer, av vilka objektets ytas materiel och färg samt laservåglängd är de viktigaste (jfr avsnitt 15.3.3 och 15.4). Moderna skannrar använder våglängder som ligger mellan 500 (grönt) och 1500 nm (nära infrarött). Ju högre reflektansen desto större är den reflekterade lasersignalens energi, vilket ökar sannolikheten av att signalen detekteras i mottagaren. Ytor som har bra reflektans kan skannas från längre avstånd. Å andra sidan, signalen reflekterad från ytor med låg reflektans kan vara för svag för att kunna detekteras (särskilt på långa avstånd). Därför kommer inget avstånd att kunna mätas till sådana ytor. I praktiken innebär det att det blir ”hål” i punktmolnet på de ställen där ytans reflektans är för låg. Reflektansen påverkar också kvalitet i avståndsmätningar.

Avböjningsenheten används för att åstadkomma 3D-mätningar av objektet eller miljön. Den kan bestå av två skanningsspeglar eller en skanningsspegel och en servomekanism. Det finns olika typer av avböjningsenheter som används i TLS (se Figur 16.14), och vissa av dem liknar dem som används i FLS (avsnitt 15.3.2). Vilken typ som används bestämmer laserskannerns siktfält (eng. “field-of-view”), dvs. vilken volym som kan mätas in från en uppställning. Förflyttning av laserstrålen i horisontal- och vertikalled kan göras på följande sätt (se även Figur 16.14):

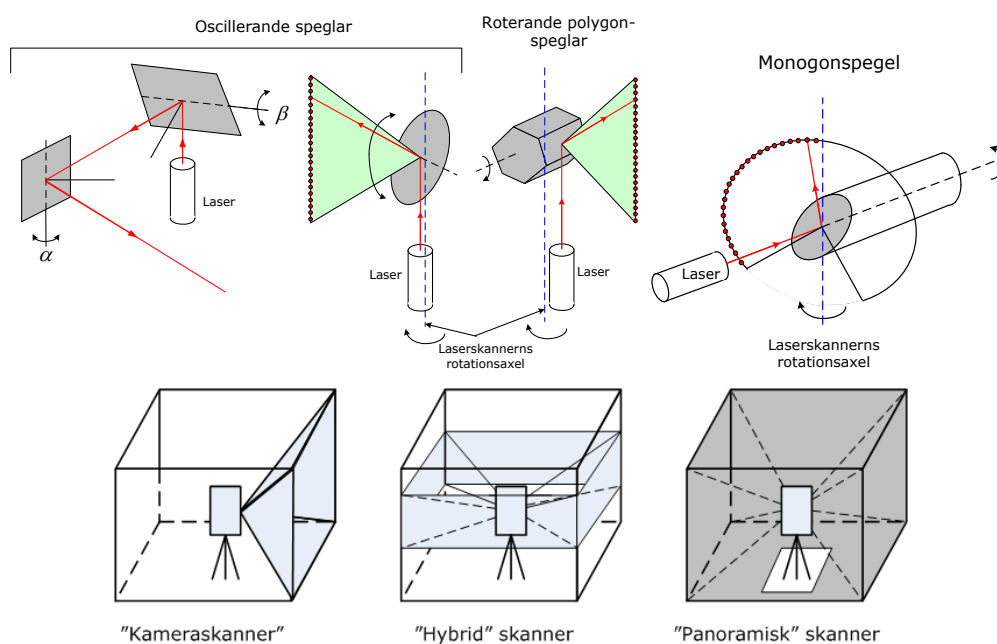
- 1) Laserstrålen förflyttas horisontalt och vertikalt m.h.a. speglar som oscillerar kring skannerns horisontala och vertikala axlar. Själva skannern

Kapitel 5: Laserskanning

(”skannerhuvud”, eng. “scanhead”) är orörlig under mätningar. Skannrar som använder sig av denna princip kallas ”kameraskannrar”, och har ganska begränsat siktfält, t.ex. $40^\circ \times 40^\circ$.

- 2) Laserstrålen förflyttas i vertikalled m.h.a. en oscillerande eller roterande polygonspegel, och i horisontalled m.h.a. en servomotor som tillåter skannern att roteras i väldigt små steg kring den vertikala axeln. Sådana skannrar kallas ”hybrida”, och har horisontalt siktfält av 360° och begränsat vertikalt siktfält, t.ex. 60° .
- 3) Laserstrålen förflyttas vertikalt m.h.a. en monogonspegel (en platt roterande spegel som är centrerad på rotationsaxeln), och horisontalt m.h.a. en servomotor (liksom i hybrida skannrar). Sådana skannrar kallas ”panoramiska”, eftersom de kan ”fånga” nästan hela utrymme runtomkring. De har horisontalt siktfält av 360° , och ungefär lika stort vertikalt siktfält (t.ex. 310° ; endast utrymme under skannern kan inte mätas in). De är särskilt användbara vid skanning inomhus.

Vinkelmätningssystemet består av sensorer som mäter laserstrålens horisontal- och vertikal riktning.



Figur 15.14. Ovan: typer av avböjningsenheter som används i TLS (baserad på Staiger, 2007). Nedan: typer av laserskannrar enligt storlek på siktfält (baserad på Staiger, 2003).

En laserskanner är dock inte den enda komponenten som användaren behöver ta med sig i fält. Om man skulle utföra mätningar cirka fem år innan skrivningstillfället (juni 2011), skulle man behöva även batteri(er) för strömförsörjning och en bärbar dator för att styra skannern samt lagra data på (se Figur 15.15, till vänster). Datorn ansluts till skannern via en Ethernet-kabel. Under de senaste fem åren har utvecklingen av TLS-hårdvara pågått mycket intensivt, och resultatet blivit att vissa av de modernaste skannrar är ganska kompakta, har ett inbyggt batteri, och kan styras genom en integrerad kontrollpanel eller pekskärm (se Figur 15.15, till höger). Vissa skannrar kan också styras trådlöst. Data kan lagras t.ex. på en intern hårddisk, en USB-enhet eller ett SD-kort.



Figur 15.15. Till vänster: pulsad laserskanner Leica Scan Station med tillhörande bärbar dator, batterier och transportlåda. Till höger: fasskillnadsbaserad laserskanner FARO Focus^{3D} med inbyggt batteri och pekskärm. Jämför även storleken på skannrarna (du kan använda trefötter som referens) (fotograf: Yuriy Reschetiuk).

15.8 Databearbetning i terrester laserskanning

15.8.1 Registrering och georeferering

Som nämndes tidigare, objekt som mäts med TLS är ofta stora (t.ex. ett pappersbruk) och kan ha en komplicerad form (t.ex. ett historiskt minnesmärke). Därför behövs det flera skanningar från olika positioner för att mäta in hela objektet i 3D. Punktmoln taget från varje uppställning fås i skannerrelaterat koordinatsystem som är unikt för respektive uppställning. För att uppnå en komplett representation av hela objektet transformeras alla punktmoln till ett gemensamt koordinatsystem, dvs. ett koordinatsystem av ett valt punktmoln. Denna procedur kallas *registrering*. För att kunna integrera TLS-data med andra rumsliga data (t.ex. totalstations- eller GNSS-mätningar), ska det ”registrerade” punktmolnet av hela objektet transformeras till ett yttre koordinatsystem, nationellt (t.ex. SWEREF 99) eller lokalt. Denna procedur kallas *georeferering*. Eftersom i ett typiskt TLS-projekt vill man normalt få data i ett geodetiskt koordinatsystem, utförs både registrering och georeferering.

Registrering

Ett exempel av när registrering behövs visas i Figur 15.16. Här har vi gjort två skanningar av ett objekt från olika positioner. Observera att för att kunna utföra registrering ska punktmoln ha en övertäckning (kallas också *övertäckning*), liksom flygbilder i fotogrammetri. Vi antar att vi ska transformera skanning 2 till skanning 1:s koordinatsystem. För att göra det ska vi bestämma transformationsparametrarna mellan de två systemen (se även Figur 15.16):

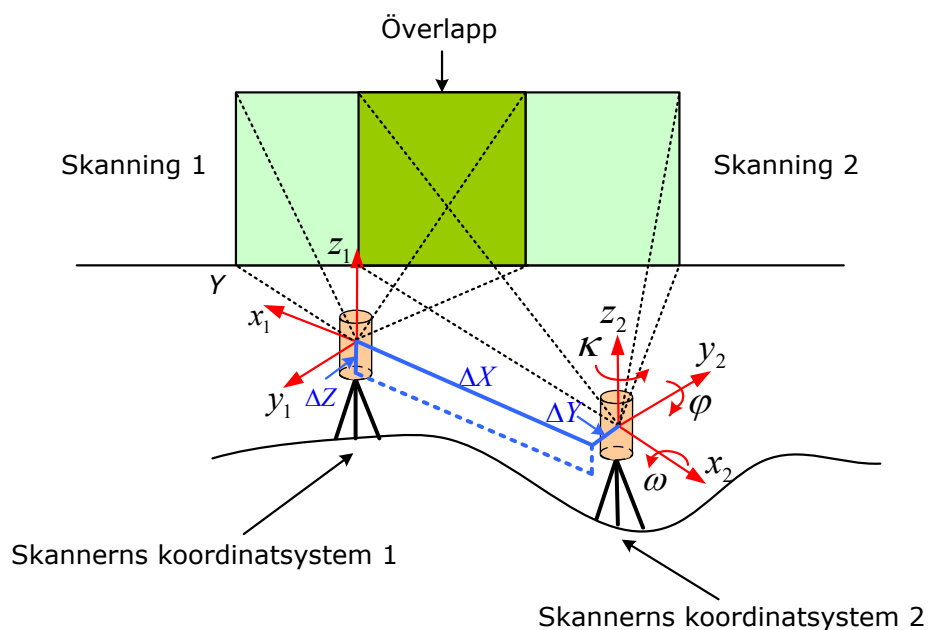
- Tre *translationer* längs tre koordinataxlar: ΔX , ΔY , ΔZ ;
- Tre *rotationer* kring koordinataxlarna: ω , φ , κ .

Det finns olika sätt att bestämma dessa parametrar, och således, olika registreringsmetoder:

- Användning av speciella måltavlor (som tillhandahålls av skannertillverkaren), synliga i båda punktmoln;

Kapitel 5: Laserskanning

- Användning av gemensamma (för överlappande punktmoln) naturliga punkter;
- Punktmoln-till-punktmoln registrering (ytmatchning);
- Användning av gemensamma geometriska objekt (t.ex. plana ytor, cylindrar, osv.).

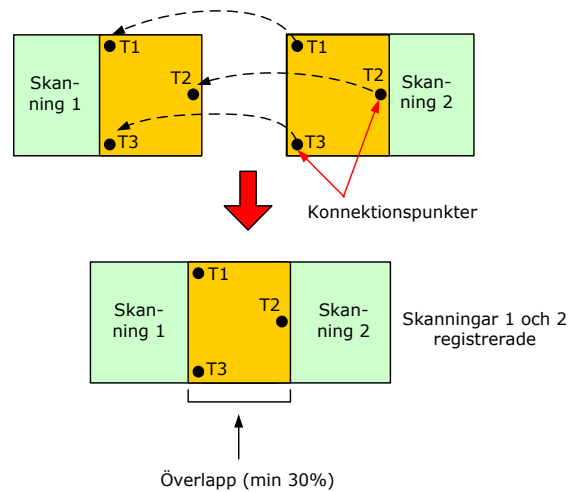


Figur 15.16. Registrering av två punktmoln (skanningar).

Registrering med hjälp av måltavlor och naturliga punkter

Användning av måltavlor är kanske den vanligaste metoden. Vi måste bestämma totalt sex transformationsparametrar (se Figur 15.16). Därför ska vi känna minst sex koordinater i båda punktmolnens koordinatsystem, som är fördelade på tre punkter som inte ligger på samma linje (eller nära en sådan konfiguration). I praktiken används minst tre speciella måltavlor (t.ex. platta eller sfäriska) som placeras i överlappet mellan punktmolnen (se Figur 15.17). För att uppnå bra resultat, ska måltavlorna vara välspredda i överlappet, med en bra variation i djupled. I TLS-sammanhang kallas måltavlor konnektionspunkter. Måltavlorna skannas separat (t.ex. efter skanning av hela objektet) med mycket hög upplösning (punkttäthet) för att kunna koordinatbestämma deras centrum med låg osäkerhet. I och med denna ”finskanning” känner vi 9 koordinater (tre för varje måltavla) i båda system, och har alltså tre överbestämningar, vilket möjliggör skattning av osäkerheten i registreringen. Med enkla ord, går registrering ut på att punktmolnen matchas till varandra, så att avstånd mellan motsvarande måltavlor i överlappet minimeras. Överlappet mellan punktmoln ska vara minst 30% för att uppnå noggrannheten i registrering som är jämförbar med osäkerhet i avståndsmätningar med skannern.

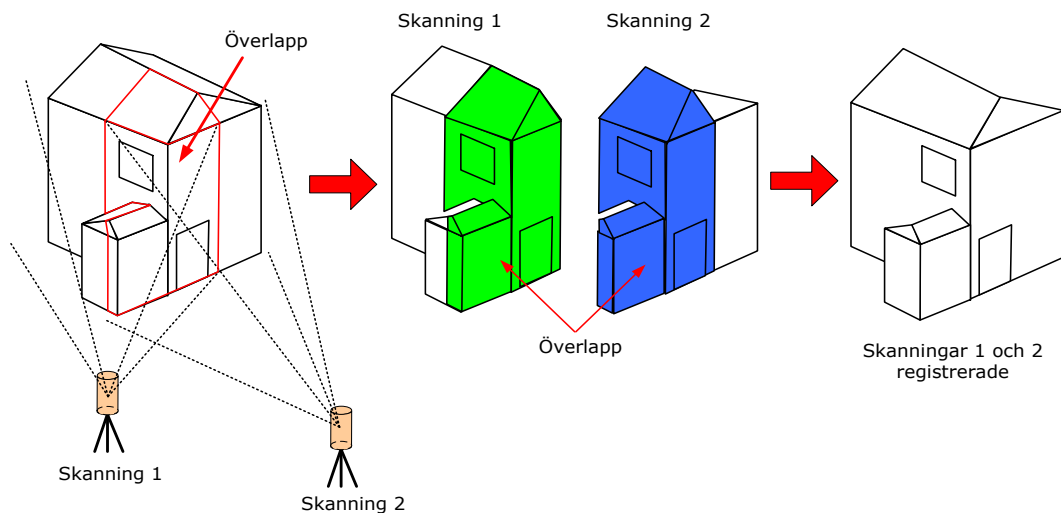
Ibland är det inte möjligt att placera måltavlor (eller tillräckligt många måltavlor) i överlappet, t.ex. vid skanning av höga byggnader. I detta fall kan distinkta naturliga punkter (t.ex. fönsterhörn) skannade med mycket hög upplösning användas som konnektionspunkter. Denna metod har dock högre mätosäkerhet än användning av måltavlor.



Figur 15.17. Registrering med hjälp av måltavlor.

Punktmoln-till-punktmoln registrering (ytmatchning)

I punktmoln-till-punktmoln registrering matchas överlappande delar av punktmolnen istället för endast gemensamma måltavlor eller naturliga punkter (se Figur 15.18). Eftersom överlappet kan innehålla så många som tusentals punkter (dvs. många överbestämningar), kan registrering ha bättre kvalitet än vid användning av diskreta konnektionspunkter.



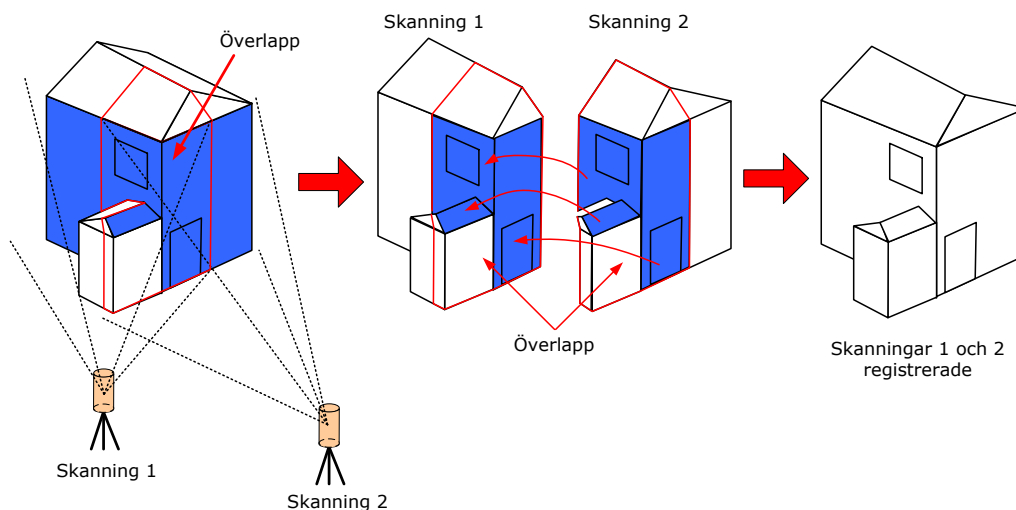
Figur 15.18. Punktmoln-till-punktmoln registrering.

Metoden kräver en bra 3D-geometri i överlappet, dvs. objekt orienterade i tre inbördes ortogonala riktningar. Bra exempel är industrianläggningar (t.ex. med många rör i olika riktningar) och byggnader; dåliga exempel är vägar och väggar. När det gäller storleken på överlappet, kan man även här rekommendera 30%.

Registrering med hjälp av gemensamma geometriska objekt

Slutligen är det också möjligt att utföra registrering m.h.a. geometriska objekt, t.ex. plana ytor, synliga i båda punktmoln. Dessa objekt ska modelleras först, t.ex. ett plan

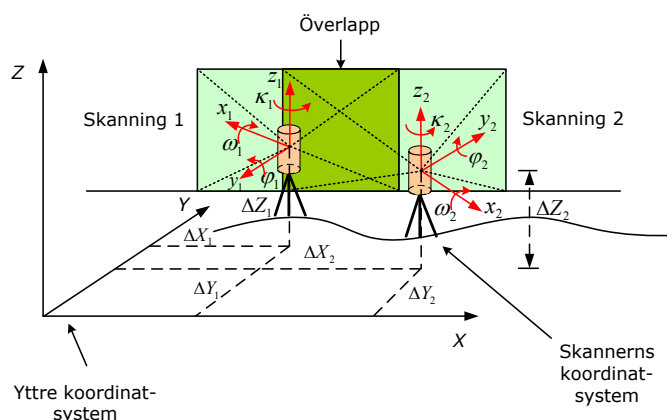
ska anpassas till punktmoln av väggen eller golvet. Principen åskådliggörs i Figur 15.19. Under registreringen beräknas en optimal ”rätning” mellan båda punktmoln, så att gemensamma geometriska objekt matchas så bra som möjligt. Liksom i punktmoln-till-punktmoln registrering, är bra 3D-geometri i överlappet viktig. Ett bra exempel är tre plan som skär varandra i ett hörn (t.ex. ett rumshörn).



Figur 15.19. Registrering med hjälp av gemensamma geometriska objekt.

Indirekt georeferering

Som nämndes ovan, georeferering är transformation av punktmoln till ett yttre (geodetiskt) koordinatsystem. I indirekt georeferering används måltavlor med kända koordinater i det yttre systemet, för att transformera punktmolnen från skannerns till detta system. Förhållandet mellan båda systemen kan beskrivas, precis som i fallet med två skanners koordinatsystem (se ovan), med sex transformationsparametrar – tre translationer och tre rotationer (se även Figur 15.20).



Figur 15.20. Förhållande mellan skannerns och yttre koordinatsystem.

För att bestämma de parametrarna, behöver vi känna minst sex koordinater, i både skannerns och det yttre koordinatsystemet, som är fördelade på tre punkter som inte ligger på samma linje (eller nära en sådan konfiguration). I praktiken används minst tre måltavlor som kallas stödpunkter. Deras koordinater kan bestämmas t.ex. med totalstation eller GNSS. Samma regler angående geometri av måltavlor som beskrivs

under ”Registrering” gäller vid indirekt georeferering, dvs. de ska vara välspredda, med bra variation i djupled. Indirekt georeferering kan utföras på två sätt som beskrivs nedan.

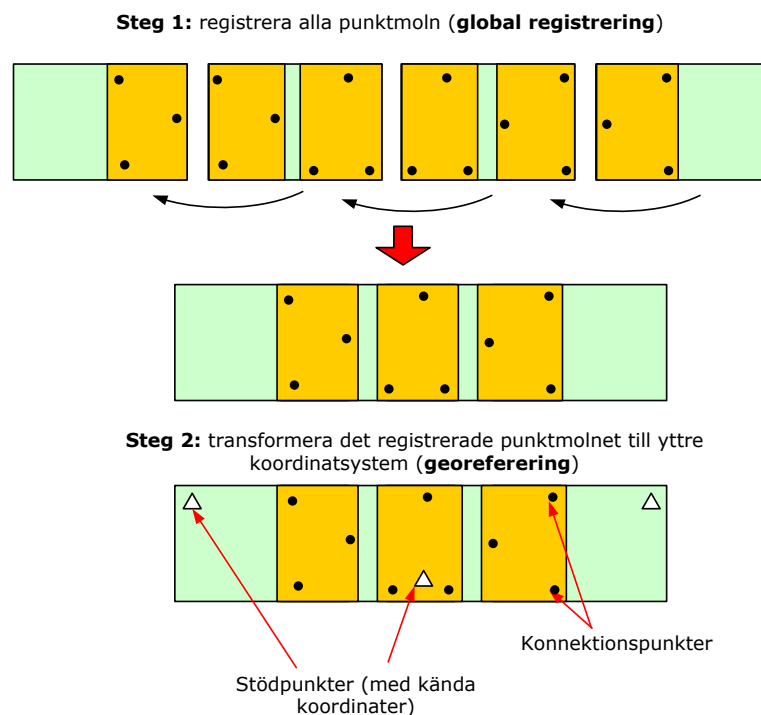
Två-steps-ansats

I två-steps-ansats utförs georeferering enligt följande:

Steg 1: registrera punktmolnen (från olika uppställningar) till ett gemensamt koordinatsystem, genom att använda olika metoder som beskrivs ovan. Ibland kallas denna procedur global registrering.

Steg 2: transformera det registrerade (”globala”) punktmolnet till det yttre koordinatsystemet, m.h.a. stödpunkter välspredda över det hela ”globala” punktmolnet. Till exempel, vid skanning av det hela utrymmet runt om skannern, bör stödpunkterna placeras över, under, framför och bakom den sista.

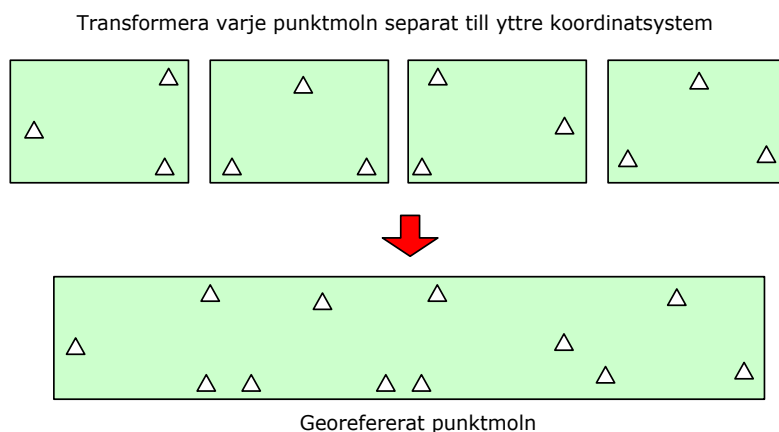
Principen illustreras i Figur 15.21.



Figur 15.21. Indirekt georeferering: två-steps-ansats.

Ett-steps-ansats

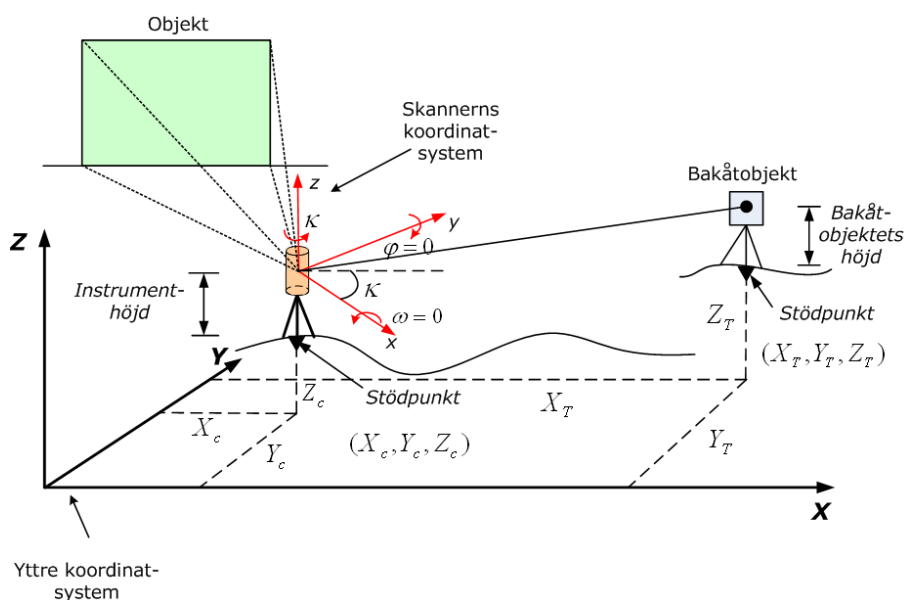
I ett-steps-ansats utförs egentligen ingen registrering, utan punktmolnen transformeras till ett yttre koordinatsystem enbart m.h.a. stödpunkter. Minst tre stödpunkter krävs i varje punktmoln i detta fall. Ingen överlapp behövs, och varje punktmoln georefereras oberoende av andra. Emellertid medför denna metod mer arbete för att mäta in stödpunkterna, eftersom mycket mer sådana krävs än i två-steps-ansats. Principen för ett-steps-ansats illustreras i Figur 15.22.



Figur 15.22. Indirekt georeferering: ett-steps-ansats.

Direkt georeferering

I direkt georeferering centrerar användaren skannern över en känd punkt, horisonterar den och mäter instrumenthöjd, precis som med totalstation. Skannerns bäring kan bestämmas genom att ”finskanna” en måltavla placerad över en annan känd punkt (bakåtoobjekt) (Figur 15.23). Därför ska en skanner vara försedd med ett optiskt (eller laser-) lod, dosvattenpass och två-axlig kompensator, vilket är fallet för många moderna skannrar. Därigenom bestäms alla sex transformationsparametrar mellan skannerns och yttre koordinatsystem direkt, utan behov av måltavlor (utom för orientering). Punktmolnet fås alltså direkt i det yttre koordinatsystemet. Det är också möjligt, med vissa skannrar, att utföra direkt georeferering efter mätningar, på kontoret, t.ex. om skannerstationens och bakåtoobjektets koordinater inte var kända före skanningen, utan bestämdes i efterhand. Det är också möjligt att bestämma både skannerns och bakåtoobjektets position m.h.a. GNSS (t.ex. nätverks-RTK) parallellt med skanningen, vilket medför tidsbesparande. Vissa skannrar är försedda med en adapter för montering av en GNSS-antenn. Wang (2011) har nyligen testat användning av RUFRIIS-metoden (jfr avsnitt 7.3) i TLS med lovande resultat.



Figur 15.23. Direkt georeferering (baserad på Gordon, 2005).

Vid en jämförelse av indirekt och direkt georeferering är den senare oftast mer effektiv. Anledningen är att i detta fall behövs det inte några överlapp mellan punktmolnen, och användaren inte behöver tänka på en bra geometri av måltavlor inom överlappet (vilken kan ibland vara svårt att uppnå). Samtidigt kan det vara mätsituationer där indirekt georeferering är mer lämpad, varför den kan förutspås att användas jämbördig med den direkta metoden i framtiden.

15.8.2 Modellering

Efter registrering och georeferering kan punktmolnen användas för 3D-modellering. Innan dess kan det dock vara nödvändigt att ”filtrera bort” ”bruspunkter” (returer från passerande bilar eller människor, vegetation, osv.) som inte är av intresse för användaren. Det pågår mycket forskning inom 3D-modellering idag, och i detta avsnitt ges endast en grundläggande beskrivning. Det sättet på vilket modellering utförs beror mycket på tillämpningsområde. I allmänhet kan två modelleringsmetoder urskiljas:

- 1) *Anpassning av enkla geometriska former* (plan, sfär, cylinder, etc.) till punktmoln. Denna metod används för modellering av objekt som består av strukturelement med regelbundna geometriska former (t.ex. industrianläggningar). Många effektiva algoritmer har utvecklats. En uppenbar fördel i detta fall är betydlig minskning av datamängder, eftersom ett stort antal punkter (t.ex. på en vägg) ersätts med endast ett objekt (ett plan).
- 2) *”Meshing”*, där ett tätt oregelbundet triangelnät (eng. ”Triangulated Irregular Network”) genereras utifrån laserreturer, som nära approximerar objektets yta. Denna metod är mycket lämplig för objekt med oregelbundna ytor, t.ex. marken och historiska minnesmärken.

-----*****-----

Status: Enbart enstaka ändringar gjordes 2021 (ingen revidering)

Tack till Dan Klang för medverkan i flera studier och rapporter som avsnitt 16.1 – 16.5 till stora delar baserar sig på. Avsnitt 16.6 – 16.8 baseras delvis, förutom referenser angivna i texten, på Barber m.fl. (2001), Bornaz m.fl. (2003), Gordon och Lichti (2004), Jacobs (2005), Kern (2001), Mettenleiter m.fl. (2000), Schulz (2007), Stephan m.fl. (2002), Tait m.fl. (2004), Wehr (2005) och Wehr och Lohr (1999). / Perola Olsson, Helen Rost och Yuriy Reschetiuk.

Lästips: Klang och Burman (2006) är en rapport som ger en bra översikt om FLS. För den som är mer intresserad av integreringen av GNSS- och TN-data ger Burman (2000) en detaljerad beskrivning. Shan och Toth (2009) är en förträfflig bok om (framför allt) FLS, som blir särskilt intressant för dem som vill fördjupa sig i ämnet. På Lantmäteriets hemsida (www.lantmateriet.se) finns projektet med att ta fram den nya nationella höjdmodellen beskrivet. Där finns både information om själva projektet och kortfattad information om FLS. Vosselman och Maas (2010) är en bra bok som ger detaljerade matematiska beskrivningar och flera tillämpningar av både FLS och TLS. Utförlig beskrivning av felkällor i TLS finns i Reschetiuk (2009).

Referenser

- Atkinson, KB (ed.). 1996. *Close Range Photogrammetry and Machine Vision*. Whittles Publishing, Scotland, UK. ISBN 1-870325-46-X.
- Barber, D., Mills, J. och Bryan, P. G., 2001: *Laser Scanning and Photogrammetry: 21st century metrology*. Proceedings of 18th International Symposium CIPA 2001. Potsdam, Germany, September 18 – 21, pp. 360 – 366.
- Bildteknik/Image Science. Tidskrift, *Svenska Sällskapet för Fotogrammetri och Fjärranalys*, Stockholm. ISSN 1104-5825. (Upphörde 2002)
- Bjerhammar, A., 1967: *Geodesi*. Uppsala: Almqvist & Wiksell.
- Bjerhammar, A., 1973: *Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses*. Amsterdam: Elsevier.
- Boberg, A. 1995. *Introduktion till flygbildstolkning*. Kompendium. KTH, Institutionen för geodesi och fotogrammetri, Stockholm.
- Boberg, A. 2005. *Den fotografiska bilden. Framställning och egenskaper hos fotografiska och digitala bilder*. Kompendium. KTH Medieteknik, Stockholm. 84 p.
- Bornaz, L., Lingua, A. och Rinaudo, F., 2003: *Multiple scan registration in LIDAR close-range applications*. In Proceedings of the ISPRS International Workshop WG V/4 and INTCOM III/V “Vision Techniques for Digital Architectural and Archaeological Archives”. Ancona, Italy, July 1 – 3.
- Burman, H., 2000. *Calibration and Orientation of Airborne Image and Laser Scanner Data Using GPS and INS*. Stockholm: KTH. ISBN 978-91-717-0565-5.
- Burman, H., 2004. *Rekommendationer vid flygburen laserskanning, version 1.0*. Vägverket, publikation 2004:117. ISSN 1401-9612. (Finns tillgänglig på www.vv.se).
- Burnside, C.D., 1991: *Electromagnetic Distance Measurement*. ISBN 0632031220.
- Egeltoft, T. och Stoimenov, G. 1997: *Map Projections*. Stockholm, Kungliga Tekniska Högskolan, Institutionen för Geodesi och Fotogrammetri, ISSN 1400-3155.
- Egeltoft, T., 2003: *Geodetisk mätningsteknik*. TRITA-GEOFOTO 1996:16, Stockholm: KTH, ISSN 1400-3155.
- Ekman, M., 1991: *Sfärisk trigonometri och jordellipsoidens geometri*. Gävle: Lantmäteriet.
- Ekman, M., 2002: *Latitud, longitud, höjd och djup – Referenssystem och kartprojektioner inom geodesi, hydrografi och navigation*. Kartografiska sällskapet. ISBN 91-631-3170-6.
- Fritsch, D. (ed) 2011. *Photogrammetric Week 2011*. Proceedings. Stuttgart.
- Gordon, S. J., 2005: *Structural Deformation Measurement Using Terrestrial Laser Scanners*. PhD thesis. Curtin University of Technology, Department of Spatial Sciences.
- Gordon, S. J. och Lichti, D. D., 2004: Terrestrial laser scanners with a narrow field of view: the effect on 3D resection solutions. *Survey Review*, No. 37, 292, pp. 448 – 468.
- Graham, R, Read RE. 1986. *Manual of Aerial Photography*. Focal Press, London. ISBN 0-240-51229-4.
- Hall, O., Alm, G., Ene, S. och Jansson, U., 2003: *Introduktion till kartografi och geografisk information*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-04050-4.
- Harrie, L. (red.), 2020. *Geografisk informationsbehandling – teori, metoder och tillämpningar. 7:e upplagan*. Lund: Studentlitteratur.
- Hauska, H., och L. Harrie, 1999: *Koordinatsystem, kartprojektioner och referenssystem, I: Geografisk informationsbehandling - metoder och tillämpningar*, L. Eklundh (red), pp. 67-89 , Stockholm: Byggeforskningsrådet.
- HMK-Detaljmätning, 1994: *HMK-Geodesi, Detaljmätning*. Gävle: Lantmäteriverket, ISBN 91-7774-041-6. Tillgänglig på www.lantmateriet.se/HMK.
- HMK-Markering, 1993: *HMK-Geodesi, Markering*. Gävle: Lantmäteriverket, ISBN 91-7774-041-6. Tillgänglig på www.lantmateriet.se/HMK.

- HMK-Stommätning, 1993: *HMK-Geodesi, Stommätning*. Gävle: Lantmäteriverket, ISBN 91-7774-041-6. Tillgänglig på www.lantmateriet.se/HMK.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H. och Wasle, E., 2007: *GNSS Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo & more*. Wien: Springer. ISBN 9783211730126.
- Jacobs, G., 2005. Registration and Geo-referencing. *Professional Surveyor Magazine*, July. Tillgänglig på: <http://www.leica-geosystems.com>.
- Joeckel, R., Stober, M., Huep, W., 2008: *Elektronische Entfernung- und Richtungsmessung und ihre Integration in aktuelle Positionierungsverfahren*. ISBN 3879074437.
- Kart & Bildteknik. Tidskrift, *Kartografiska Sällskapet*, Gävle. ISSN 1651-792X.
- Katzenbeisser, R., 2003: *About the Calibration of Lidar Sensors*. Proceedings of the ISPRS workgroupIII/3 workshop Dresden, 8-10 Oct 2003. (Finns tillgänglig på www.isprs.org).
- Klang, D. och Burman, H., 2006: *En ny svensk höjdmödel, Laserskanning, Testprojekt Falun. LMV-rapport 2006:3*. Gävle: Lantmäteriet, ISSN 0280-5731. (Finns tillgänglig på www.lantmateriet.se)
- Kern, F., 2001: *Supplementing laserscanner geometric data with photogrammetric images for modelling*. In Proceedings of 18th International Symposium CIPA 2001. Potsdam, Germany, September 18 – 21, pp. 454 – 461.
- Kraus, K. 2000. *Photogrammetry. Volume 1 Fundamentals and Standard Processes*. Dümmler, Bonn. ISBN 3-427-78684-6.
- Lantmäteriet. *Nya HMK*. www.lantmateriet.se.
- Lantmäteriverket 1994. *HMK - Handbok till mätningkungörelsen, del Fotogrammetri (HMK-Fo)*. LMV, Gävle. ISBN 91-7774-041-6.
- Lantmäteriverket 1996. *HMK - Handbok till mätningkungörelsen, del Kartografi (HMK-Ka)*. LMV, Gävle. ISBN 91-7774-062-9.
- Lantmäteriverket, Sveriges Geologiska Undersökning och Sjöfartsverket. *Kartplan*. Årlig publikation.
- Leick A, 2004: *GPS Satellite Surveying*, Third Edition, John Wiley & Sons, ISBN 0-471-05930-7.
- Lindskog, J., 2006: *Mätvärdesbehandling och rapportering av mätresultat*, Studentlitteratur, ISBN: 9789144005126.
- Loxton, J., 1980: *Practical Map Production*. New York: John Wiley & Sons. ISBN 0-471-277-827.
- Lundemo, E. (ed.) 1993. *Fotogrammetri for kulturminnevern*. Norges Karttekniske Forbund / Statens Kartverk, Hønefoss.
- McDonnell, P. W. Jr., 1979: *Introduction to Map Projections*. New York: Marcel Dekker.
- Mettenleiter, M., Härtl, F., Frölich, C. och Langer, D., 2000: *Imaging Laser Radar for 3D-Modelling of Real World Environments*. Internat. Conference on OPTO/IRS2/MTT. Erfurt, Germany, May 9 – 11.
- Michail, EM et al. 2001. *Introduction to Modern Photogrammetry*. John Wiley & Sons, Inc. New York. ISBN 0-471-30924-9.
- Mårtensson, S.-G., 2010: *Geomatik-Lantmäteriteknik: Mätningsteknik*. Högskolan i Gävle, (opublicerad).
- Norin, D., Engfeldt, A., Johansson, D. och Lilje, C., 2006: *Kort manual för mätning med SWEPOS Nätverks-RTK-tjänst*. LMV-rapport 2006:2. Rapporter i geodesi och geografiska informationssystem från Lantmäteriet, Gävle.
- Odolinski, R., 2010: *Checklista för nätverks-RTK*. LMV-rapport 2010:3. Rapporter i geodesi och geografiska informationssystem från Lantmäteriet, Gävle.
- Ollvik, L. & Gunnarsson, J., 2000: *Kompendium i mätningsteknik, allmänna kurser*. Lunds Tekniska Högskola.
- Ottoson L, Ternryd C-O, Torlegård K. 2004. *Svensk fotogrammetri och fjärranalys under 1900-talet*. Kartografiska Sällskapet. ISBN 91-631-5026-3.

- Persson, C.-G., 2010a: *GUM, en guide för att uttrycka mätosäkerhet*. (Artikel + bildspel). Tillgänglig på www.lantmateriet.se/HMK.
- Persson, C.-G., 2010b: *Några vanliga fördelningar – från ett GUM-perspektiv*. Tillgänglig på www.lantmateriet.se/HMK.
- Persson, C.-G., 2010c: *Sammanlagd mätosäkerhet – kvantitativa metoder*. Tillgänglig på www.lantmateriet.se/HMK.
- Persson, C.-G., 2010d: *GUM – ett exempel (Typ A)*. Tillgänglig på www.lantmateriet.se/HMK.
- Persson, C.-G., 2010e: *Exempel på Typ B-bestämning av mätosäkerhet*. Tillgänglig på www.lantmateriet.se/HMK.
- Persson, C.-G., 2010f: *Korrelationens betydelse vid GUM-analyser*. Tillgänglig på www.lantmateriet.se/HMK.
- Reschetiuk, Y., 2009: *Terrestrial laser scanning: error sources, self-calibration and direct georeferencing*. Saarbrücken: VDM Verlag. ISBN 9783639175509.
- Schenk, T. 2000. *Digital Photogrammetry*. Volume 1. TerraScience, Laurelville, OH, USA. ISBN 0-9677653-0-7.
- Schulz, T., 2007: *Calibration of a Terrestrial Laser Scanner for Engineering Geodesy*. PhD thesis, ETH Zurich.
- Shan, J. och Toth, C.K. (Eds.), 2009: *Topographic laser ranging and scanning: principles and processing*. Boca Raton: CRC Press/Taylor & Francis Group. ISBN 9781420051421.
- Sjöberg, L., 2008: *Ellipsoidal Geodesy*, Department of Geodesy, Stockholm, Trita-Geod.
- Snyder, J. P., 1987: *Map projections – a working manual*. U.S.G.S. prof. paper 1395. Washington: United States Government Printing Office. Tillgänglig på: <https://pubs.er.usgs.gov/publication/pp1395>.
- Staiger, R., 2003: *Terrestrial Laser Scanning – Technology, Systems and Applications*. In Proceedings of 2nd FIG Regional Conference. Marrakech, Morocco, December 2 – 5.
- Staiger, R., 2007: *Terrestrial Laserscanning – Scanners and Methods*. Presentation at INTERGEO East. Sofia, Bulgaria, 1 – 2 March.
- Stephan, A., Heinz, I., Mettenleiter, M., Härtl, F., Frölich, C. och Hined, D., 2002: *Interactive Modelling of 3D-Environments*. In Proc. of the 11th IEEE Int. Workshop on Robot and Human interactive Communication, ROMAN2002. Berlin, Germany, September 25 – 27, pp. 530 – 535.
- Sjöberg, L., 1990: *Ellipsoidal geodesy*. TRITA-GEOD 2008, Stockholm: KTH.
- Tait, M., Fox, R. och Teskey, W. F., 2004: *A Comparison and Full Error Budget Analysis for Close Range Photogrammetry and 3D Terrestrial Laser Scanning with Rigorous Ground Control in an Industrial Setting*. In Proceedings of INGEO 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying, Bratislava, Slovakia, November 11 – 13.
- Torlegård K. 1999. *Analytisk fotogrammetri och dess felteori*. Kompendium, TRITA-GEOFOTO 1999:2. KTH, Institutionen för geodesi och fotogrammetri, Stockholm.
- Ussisoo, L., 1977: *Kartprojektioner*. Tekniska skrifter 1977/6, Gävle: Lantmäteriverket.
- Vestøl O., Ågren J., Steffen H., Kierulf, H., Tarasov, L, 2019: NKG2016LU - A new land uplift model for Fennoscandia and the Baltic Region. Journal of Geodesy, <https://doi.org/10.1007/s00190-019-01280-8>.
- Vosselman, G. och Maas, H-G., 2010: *Airborne and terrestrial laser scanning*. Dunbeath (Scotland): Whittles publishing. ISBN-978-1904445-87-6.
- Waldhäusl P, Ogleby C. 1997. *3-by-3-Rules for Simple Photogrammetric Documentation of Architecture*.
- Wang, Z., 2011: *Real-time updated free station as a georeferencing method in terrestrial laser scanning*. Bachelor thesis. University of Gävle. Tillgänglig på: <http://hig.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:423230>.
- Wehr, A., 2005: *Laser Scanning and Its Potential to Support 3D Panoramic Recording*. Proceedings of

- ISPRS WG V “Panoramic Photogrammetry Workshop”, Berlin, Germany, February 24 – 25.
- Wehr, A. och Lohr, U., 1999: Airborne laser scanning – an introduction and overview. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, Vol. 54, pp. 68 – 82.
- Woodman, O. J., 2007. *An introduction to inertial navigation. Technical Report, Number 696.* Cambridge: University of Cambridge, Computer Laboratory. ISSN 1476-2986.
- Ågren, J. och Svensson, R., 2007: *Postglacial land uplift model and system definition for the new Swedish height system RH 2000.* LMV-rapport 2007:4, Rapporter i geodesi och geografiska informationssystem från Lantmäteriet, Gävle.
- Ågren, J., 2009: *Beskrivning av de nationella geoidmodellerna SWEN08_RH2000 och SWEN08_RH70.* LMV-rapport 2009:1, Rapporter i geodesi och geografiska informationssystem från Lantmäteriet, Gävle.

Sakordsregister

3

3D-modell · 81, 261
3D-modellering · 276

A

absolut orientering · 217
AGA · 75
ajourhållning · 115
aktivt referensnät · 121
alidad · 70, 72, 73
allkontroll · 118
almanacksdata · 164
ambiguity · 166, 173
analytiska transformationer · 60
anslutningsnät · 95, 100, 133, 134
AS · 167
asimutal kartprojektion · 26
attributdata · 120
avplattningen · 9, 10
Avskärning · 94
avvägning · 22, 55, 56, 82, 84, 87, 100, 101, 102, 104, 112, 116, 117, 134
avvägningsinstrument · 22, 69, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 101, 102
avvägningsnät · 100, 101, 134, 148
avvägningsstång · 82, 85, 86, 87, 114, 118
avvägningståg · 100, 103

B

bakåtoobjekt · 94, 95, 97, 112, 113, 115, 117, 122
banparametrar · 161, 165, 167, 169
barometerhöjdmätning · 82
basverksamhet · 109
Bessel 1841 · 10
beställarens kontroll · 118
bildskanning · 186
BIPM · 123
blocktriangulering · 218
broadcast ephemeris · 164
bruksnät · 95, 96, 100, 111
brukspunkter · 95, 113, 114, 156, 158
brytningsvinkeln · 97, 100
bygg- och anläggningsverksamhet · 109, 111
byggglaser · 87, 117
byggplatspunkter · 118
bågavståndet · 18, 19
bäring · 90
bärväg · 79, 165, 170

C

C/A-kod · 164, 165, 176
CAD-program · 81
centralprojektion · 186
cykliskt fel · 79

cylindrisk projektion · 33

D

delkontroll · 118
detaljmätning · 6, 73, 89, 109, 111, 115, 116, 118, 121, 133
detaljplan · 110
detaljpolygontåg · 96, 111
detaljpunkt · 118
diagonalmatris · 141
digital baskarta · 109
digital bildmatchning · 221
direkt georeferering · 275
direktprojektion · 65, 66
DLL · 166
DOP · 171, 177
dopplerförskjutningen · 162
dubbelavvägning · 103
dynamiska metoden · 162

E

EDM · 69, 75, 76, 79, 81, 253
Egenkontroll · 118
elektroniskt avvägningsinstrument · 84, 85, 86
elektrooptiskt längdmättningsinstrument · 76
elementutjämning · 113, 138, 140
elementära punktbestämningsmetoder · 94
empirisk koordinattransformation · 65, 66
enhetslängd · 78, 80
enkelpunktbestämning · 169, 175
E-tillägg · 33, 34, 48, 50, 53
ETRS 89 · 45, 46, 66
Euklidiskt avstånd · 17, 19, 20
EVRF 2007 · 56

F

fasmätning · 79, 166, 167, 168, 169, 170, 175, 176, 255
fasskillnadsmätning · 77
fasskillnadsprincip · 76
fastighetsbildning · 109
felanalys · 123, 132
felgräns · 133
finavläsning · 78
finhorisontering · 72, 73
finoptimering · 86
finutsättning · 117
fixhåll · 100, 102, 104
fixpunkt · 100, 127
flervägsfel · 169, 170, 172, 173, 177
flygburen laserskanning · 7, 253, 254, 258, 260, 262, 264, 270, 276
flyttpunkt · 102
fotogrammetri · 2, 7, 181, 201, 254
fotogrammetriska mätmetoder · 2, 3, 4
fri station · 111, 112, 113, 114, 121, 122, 158
fri stationsetablering · 113

fri uppställning · 113
fundamentalfrekvens · 164
fäldator · 112, 121
förbättring · 124, 134
förebyggande kontroll · 118
första excentriciteten · 14
förstoringsfaktorn · 33, 53
förställning · 72

G

Gauss-Krügers · 32
geocentriska kartesiska koordinatsystemet · 13
geodesi · 2, 7, 18, 42, 67, 123, 137
geodetiska linjen · 18, 31
geodetiska mätmetoder · 2
geodetiskt datum · 43
geodetiskt referenssystem · 43, 44, 46, 48, 54, 61, 253, 263
geografisk information · 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 43, 46, 48, 144
geografisk informationsteknik · 2
geografiska informationssystem · 2, 120
geoid · 20, 23
geoidhöjden · 20, 23, 57
georeferering · 256, 264, 270
GIS · 2, 7, 8, 120, 260
Global Positioning System · 6
globalt anpassat referenssystem · 44
gnomonisk · 28
GNSS · 6, 10, 18, 23, 41, 43, 44, 57, 58, 81, 82, 89, 96, 109, 121, 161, 163, 165, 166, 170, 175, 176, 177, 255, 256, 258, 260, 264, 276
gon · 53, 54, 60, 64, 66, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 85, 90, 92, 93, 94, 97, 100, 105, 107, 117
GPS · 6, 10, 23, 43, 45, 46, 109, 121, 123, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 173, 174, 175, 178, 180
gradnät · 32
Greenwich · 11, 13, 14, 32, 34, 45, 48, 53
grovavläsning · 78
grovhorisontering · 72
grovoptimering · 86
grovutsättning · 117
GRS 80 · 9, 10, 16, 17, 19, 39, 45, 46, 48
grundkarta · 110, 116
GUM · 123, 124, 125, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135

H

halva lillaxeln · 10
halva storaxeln · 10, 15, 16
Helmerttransformation · 61, 65
hjälpunkt · 43
HMK · 5, 7, 88, 98, 104, 118, 122, 133, 134, 135, 158, 159
Hopfields modell · 169
horisontalaxel · 70
horisontalriktning · 92
horisontalvattenpass · 71, 83
horisontalvinkel · 69, 70, 94
horisontalvinkelmätning · 69, 92
hydrostatisk höjdmätning · 82

högpunktsnät · 95
höjd över ellipsoiden · 14, 54
höjder över geoiden · 21, 22, 56, 57
höjdfix · 55, 100, 112, 118
höjdmätning · 22, 81, 82, 93, 100, 101, 104, 105, 106, 107, 111, 112, 115, 125
höjdnät · 55, 56, 57, 100, 101, 133, 134, 148, 155
höjdslutningsfel · 104
höjdsystem · 20, 21, 22, 23, 24, 54, 55, 56, 57, 58, 89, 100
höjdtågsnät · 100

I

IGS · 165
illa-konditionerat system · 145
impulsinstrument · 76, 77
inbindning · 94
indexfel · 74
indexsystem · 51, 54
indikatrix · 36
indirekt georeferering · 273
inklinationsfel · 74
inmätning · 4, 5, 6, 89, 96, 100, 109, 110, 112, 114, 115, 117, 118, 119, 121, 122
inre orientering · 194
inskränning · 94
instorhet · 131
integrerade navigationssystem · 197
invers · 137, 138
invertering · 137, 139
IR · 76
ISO · 123
ITRF · 45

J

JCGM · 123
jonosfär · 169
jonosfärsfri kombination · 171
jordellipsoiden · 9, 10, 20, 21, 23, 25, 39, 43, 44, 48, 53, 57, 59
jordkrökning · 55, 105, 106, 107
jordmodell · 6, 9, 11, 17, 20, 26, 27, 38, 41

K

kartdatabas · 49
kartografi · 2
kartprojektion · 6, 26, 27, 28, 29, 30, 33, 34, 41, 44, 48, 49, 50, 60, 64, 65
kartprojektionsparametrar · 33, 34, 48, 50, 54, 66
kikare · 73, 82, 87
Klobuchars modell · 169
klockfel · 164, 165, 166, 169, 170, 173
klockkorrektur · 168
knutpunkt · 148
kodmätning · 165, 167, 168, 169, 175, 179
koefficientmatris · 138, 171
kolinariet · 198
kollimationsaxel · 70
kollimationsfel · 74, 87

kollimationsfel i höjddled · 74
kollimationsfel i sidled · 74
kommunalteknik · 109
kompensator · 83
konfidensintervall · 129
konfidensnivå · 129, 131
konform · 29, 30
konisk kartprojektion · 34
konnektionspunkter · 271
konstaterande kontroll · 118
kontrolldata · 119
kontrollerbarhet · 134
kontrollsegment · 165
kontrollstationer · 165
koordinatförbättring · 98, 100
koordinatslutningsfel · 98, 100
koordinatsystem · 2, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 25, 43, 44, 46, 48, 49, 53, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 66, 89, 95, 113, 255, 256
koordinattransformation · 44, 59, 113
korrelation · 86, 143, 144, 147, 148
korrelationskoefficient · 143, 146, 151
korresponderande trigonometrisk höjdmätning · 107
kovarians · 143
krökningsradie · 106, 107
k-tal · 134
kvalitetsmärkning · 119, 120
kvasigeoiden · 23, 55
känslighetsfaktor · 131

L

lagen om fortplantning av mätosäkerhet · 125, 127, 131, 132, 144
Lamberts projektion · 32
Lamberts ytriktiga azimutalprojektion · 32
landhöjningen · 22, 55, 57
laseravståndsmätare · 268
laserplangivare · 87
laserskanner · 81, 175, 253, 254, 259, 261
laserskanning · 116, 253, 254, 257, 258, 260, 262, 263, 276
laserstråleavböjningsenheten · 268
latitud · 6, 12, 14, 25, 43, 46, 48, 53
likformig transformation · 61, 63, 64, 65
linjär funktion · 144
linjär regression · 144, 146, 147, 148
lodbild · 187
lodlinje · 259
longitud · 6, 11, 14, 25, 34, 43, 46, 48
loxodrom · 31
lutande längd · 93, 104
lägeskontroll · 110
längdriktig · 30, 33

M

mareografer · 54
markfotogrammetri · 246
markklassning · 253, 265
medelfel · 132
medelmeridian · 26, 33, 37, 49, 50, 53
medeltalets standardosäkerhet · 126, 127, 131, 132, 140, 142

mellandel · 70
Mercators projektion · 31, 34, 37, 38, 39, 48, 50, 65, 66
meridian · 11, 17, 18, 26, 32, 33, 36, 48
metadata · 120
mikrovågor · 76
mikrovågsinstrument · 76
minsta-kvadratmetoden · 64, 123, 124, 134, 137, 139, 147, 151, 171
mk-metoden · 123, 138
modulering · 79
Mollweides projektion · 31, 33
MP · 170
multi path · 169
mätdatafil · 119
mätetal · 125
mätfel · 123, 132, 155
mätkamera · 190
mätvikare · 71, 72, 82, 83
mätkontrollprogram · 118
mättingsrest · 152, 153
mätosäkerhet · 6, 46, 75, 118, 123, 124, 125, 129, 130, 131, 132, 133, 167, 177, 179, 256, 258, 260, 262, 263, 264, 265, 291
mättriaktning · 101
mätstorhet · 125, 131
mätstång · 111, 121
mätsystem · 125
mätt riktning · 70, 92

N

NAP · 55
navigeringsmeddelande · 164
NAVSTAR · 162
nollpunktsfel · 79, 80
normalekvationer · 146
normalfördelningen · 123, 133
normalhöjder · 23, 55
normerad observationsekvation · 152, 153, 154, 157
northing · 25, 89
N-tillägg · 33, 34, 48, 50, 53
nybyggnadskarta · 110, 115
närmevärde · 86

O

objektbeskrivande data · 120
objektkod · 112
observationsekvation · 152, 155
olinjär funktion · 155
optisk distansmätning · 72, 102
optiskt lod · 73
orienterad riktning · 90, 92, 94, 95, 98, 100, 117
orienteringskvantitet · 92
orienteringsvinkel · 92
ortofoto · 201
ortogonal mätning · 95
ortografisk · 28, 33
ortometriska höjder · 23
osäkerhet · 6, 13, 14, 58, 60, 66, 113, 123, 127, 156, 165, 169, 171, 176, 178, 179, 256, 263, 264
osäkerhetsanalys · 123, 132

P

padda · 101
parallax · 71, 72
parallaxformler · 210
parallellcirkel · 17, 27, 36
periodbortfall · 166
periodkonstant · 166
periodobekant · 166, 173
piképunkt · 112
P-kod · 164, 167, 176
planlaser · 87, 88
planmätning · 104, 115
planplatta · 84
plant stomnät · 95
PLL · 166
polygonnät · 95, 96
polygonpunkt · 95
polygontåg · 95, 96, 97, 100, 134
polär mätning · 81, 94, 111
polära koordinater · 92
PPP · 177
precisa banddata · 165, 169, 177
Precise Point Positioning · 177
precisionsavvägning · 55, 84, 102
primärkarta · 109, 110
primärnät · 111
primärpunkt · 118
prisma · 111, 121
procentuell kontroll · 118
profil · 117, 263
projekteringsunderlag · 1, 115, 260
protokollsfil · 120
pseudoavstånd · 165, 166, 167, 171
pulsfrekvens · 259
punktmoln · 7, 260, 263, 264, 265
punkttäthet · 258, 259, 261, 262, 263
PZ-90 · 10

R

radiell felteckning · 195
radiell höjdeplacering · 189
radiellt slutningsfel · 98, 133
referensatmosfär · 79
referenspunkter · 43, 46, 53, 55, 89
referensstationsnät · 46
referenssystem · 43, 44, 45, 46, 52, 53, 54, 60, 61, 64, 65, 66, 67, 111, 120, 162, 177, 256, 291
refraktion · 105, 106, 107
refraktionskoefficient · 106, 107
regionalt anpassat referenssystem · 53
registrering · 270
rektangulära koordinater · 92
Rektifiering
 rektifiering · 201
relationshandling · 115
relativ orientering · 214
relativ standardosäkerhet · 127
relativistiska effekter · 170
RH 00 · 56, 57
RH 2000 · 55, 56, 57
RH 70 · 56, 57
rikets nät · 54
riksnät · 100

riktningsmätning · 92, 113
RINEX · 178
rover · 121
RT 90 · 46, 53, 54, 60, 64, 65, 66
RTK · 121, 122, 176, 179, 180
RUFRIIS · 121, 275
rutavvägning · 116
rymdsegment · 163

S

SA · 167
Saastamoniens modell · 169
sammanlagd standardosäkerhet · 131
satellitmätning · 2, 69, 161
sekundärpunkt · 118
selective availability · 167
sfärisk latitud · 11, 12
sfärisk longitud · 11, 12
sfäriska koordinater · 11, 13, 38
sfäriskt avstånd · 17, 18
sidoskärmning · 95
siktaxel · 71, 74, 101
singulär matris · 137
situationsplan · 110
skala · 9, 29, 61, 69, 110, 145
skalfel · 39, 49, 79
skalning · 144, 155, 156
skanningsfrekvens · 259
skärbindning · 94
standardavvikelse · 130, 170
standardiserad mätosäkerhet · 124
standardmätosäkerhet · 124
standardosäkerhet · 45, 55, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 139, 141, 142, 144, 146, 150, 151, 152, 154, 157, 158
stationsetablering · 112, 118
stationspunkt · 114
statistisk kontroll · 118
stereografisk · 28, 34
stereoseendet · 204
stickprovskontroll · 118
stjärntriangulering · 162
stommätning · 73, 75, 133, 175
stomnät i höjd · 100
stompunkter · 43, 89, 95, 96, 111, 114, 118
storpolygonnät · 95
storskaligt informationssystem · 110
stråk · 259, 260, 262, 263, 264, 265
stråkutjämnning · 260, 264, 265
sträng utjämnning · 113
svepbredd · 259, 262
SWEN08_RH2000 · 58, 59
SWEPOS · 46, 121, 177, 179, 256, 291
SWEREF 99 · 13, 14, 16, 19, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 61, 66, 89, 177
SWEREF 99 TM · 48, 49, 59, 60
symmetrisk · 138
synligt ljus · 76, 255
systemtid · 168

T

takymetrering · 116

teodolit · 69, 70, 71, 73, 75, 81, 82, 87, 89, 92
terrester laserskanning · 266
terrester mätning · 2, 18, 89
terrängmodell · 116
t-fördelningen · 130
tolerans · 98, 104
Total Electron Content · 291
totalstation · 81, 89, 104, 111, 116, 121
transponat · 137
transponering · 137
transversala Mercator-projektionen · 32, 33, 34, 50,
53, 65
trefot · 73
triangelnät · 95, 96, 101, 134, 155
triangelpunkt · 53, 95
trigonometrisk höjdmätning · 81, 82, 93, 100, 104,
105, 106, 107, 112, 125
trigonometriskt höjdnät · 101
troposfär · 169
träffyta · 258, 259
tröghetsnavigering · 256, 257
tröghetssystem · 253, 254, 255, 256, 263, 265
tvångscentrering · 73
tvärkrökningsradien · 14, 16
tvärsektion · 117
typ a, bestämning av mätosäkerhet · 124
typ b, bestämning av mätosäkerhet · 124
tågriktning · 100
täckningsfaktor · 129, 131, 132
täckningsgrad · 129, 130, 131, 132

U

UPS · 34
UTC · 164
UTM · 34, 35, 39, 40, 48, 49
utstorhet · 125, 131
utsända banddata · 164
utsättning · 81, 88, 89, 91, 95, 109, 110, 111, 112,
117, 118, 119, 120, 121, 179
utsättningsdata · 112, 119, 121
utvidgad mätosäkerhet · 129, 130, 131, 132, 291

V, W

varians · 124, 139, 141, 142, 143, 144, 146, 150,
155, 158
varians-kovariansmatris · 139, 141, 142, 143, 146,
150, 155
vattenpass · 72, 73, 74, 82
vertikalaxel · 70, 87
vertikalvinkel · 74, 93, 104, 125
vertikalvinkelmätning · 73, 74
vikt · 123, 127, 138
vikttal medeltal · 127, 142
viktsenhets standardosäkerhet · 55, 128, 129, 141,
142, 146, 150, 154, 158
viktsmatris · 152
vinkelförbättring · 98
vinkelmätning · 69, 70, 72, 75, 81, 92, 93, 112, 158
vinkelriktig · 29, 30, 31, 32, 34, 36, 37, 41
vinkelslutningsfel · 98
väggpunktsnät · 95
WGS 84 · 10, 45, 165, 170

Y

ytavvägning · 116
yttre orientering · 196

Z

zenit · 70, 71, 74, 93
zenitdistans · 93, 104, 107

Ä

ärendeverksamhet · 109, 110

Ö

öppningsvinkel · 85, 259, 262
överbestämning · 115
överlapp · 270
överräkning · 59

Ordförklaringar fotogrammetri

Hänvisningarna är till avsnitt.

Absolutorientering (14.2.3)	skalbestämning, horisontering och inpassning av en stereomodell i det geodetiska koordinatsystemet
Anaglyfmetod (14.2.1)	metod för stereobetraktning med hjälp av komplementärfärgade filter
Analog fotogrammetri (14.2.6)	mätning av modellkoordinater i optiskt eller mekaniskt rekonstruerad stereomodell
Analytisk fotogrammetri (14.2.2)	numerisk rekonstruktion av modell- och objektkoordinater ur mätta bildkoordinater i bildpar
Bas (14.2.1, 15.4.1)	avstånd mellan närliggande exponeringsorter eller mellan instrumentets projektorer vid stereoskopisk avbildning; balk för montering av stereokameror
Bas/höjdförhållande (14.3.2, 15.4.4)	kvoten mellan flygfotobas och flyghöjd, styr mätnoggrannheten i höjd
Baskarta (15.1.1)	storskalig underlagskarta för planering, projektering och redovisning.
Bildbas (14.2.1)	Fotograferingsbasens avbildning i bilderna
Bildelement (13.2.2)	digital bildpunkt med ett numeriskt värde på den registrerade strålningsintensiteten
Bildhuvudpunkt (13.3.4)	foto punkten i bildplanet för normalen från projektionscentrum. Sammanfaller (nära) med bildcentrum
Bildkoordinater (14.2.1)	koordinater i bildens skala i ett rätvinkligt koordinatsystem med origo i bildhuvudpunkten eller i bildmatrisens hörn
Bildmatchning (14.2.5)	automatisk parallaxmätning i digitala stereoskopiska bilder
Bildmatris (13.2.2)	se Digital bild
Bildskanner (13.2.3)	utrustning för inläsning av fotografisk bild till digital form
Bildstråk (15.1.3)	det stereobildtäckta området vid flygfotografering i ett flygstråk
Bildtriangulering (14.2.4)	blocktriangulering som gemensam utjämnning av kolineariteter i ett block av bilder
Block (14.2.4)	bilder i parallella flygstråk över ett område med längs- och sidoövertäckning och ev. tvärstråk
Blocktriangulering (14.2.4)	fotogrammetrisk bestämning av yttre orienteringen hos bilder i ett block genom bildkoordinatmätningar i blocket och lösning av ett system av kolinearitetskvationer
CCD-sensor (13.2.1)	digital bildsensor med rad eller matris av ljuskänsliga element
Centralprojektion (13.3.1)	avbildning på ett plan genom projektion med räta strålar genom en gemensam punkt (projektionscentrum)
Digital bild (13.2.2)	en matris av bildelement (pixlar), vilka vardera har ett digitalt gråvärde eller färg
Digital fotogrammetri (14.2.5)	analytisk fotogrammetri, tillämpad på digitala bilder
Digital höjdmodell (15.1.2)	ett nät av höjdpunkter, som beskriver markytans form
Digital kamera (13.2.1)	Kamera med CCD-matris eller CCD-rad(er) i bildplanet
Digital ytmodell (15.1.2)	ett nät av höjdpunkter, som beskriver landskapets ytform inklusive alla detaljer (träd, byggnader mm)
Enkelpunktsinskränning (13.3.5)	bestämning av en enkelbilds yttre orientering med hjälp av kända stödpunkter
Exponeringsort (13.3.4)	projektionscentrums läge i ett yttre koordinatsystem
Epipolarplan (14.2.1)	plan som spänns upp av projektionscentra, bildpunkter och modellpunkt i ett relativorienterat stereopar

Felteckning (13.3.4)	geometrisk skillnad mellan inre och yttre strålkärven vid centralprojektion
Flygstråk (15.1.4)	linje som sammanbinder exponeringsorterna vid flygfotografering
Fotograferingsbas (14.2.1)	Avståndet mellan exponeringsorterna i ett stereoskopiskt bildpar
Fotogrammetri (13.1)	Se avsnitt 13.1
Fotogrammetrisk arbetsstation (14.2.5)	dator, utrustad för digital fotogrammetri
Fotokarta (14.1.1, 15.3.2)	karta som innehåller fotobild
Homologa punkter (14.2.5)	motsvarande bilddetalj i vardera bilden i ett stereopar
Horisontalparallax	se Parallax i bildpar och X-parallax
Inbördes orientering	se Relativorientering
Inre orientering (13.3.4, 14.2.3)	kameradata som erfordras för rekonstruktion av den yttre, bildalstrande strålkärvens form
Integrerad navigering (13.3.4)	Kontinuerlig bestämning av yttre orienteringen hos ett rörligt sensorsystem med hjälp av integrerad GPS-teknik och tröghetsnavigering (INS)
Kameraaxel (13.3.1)	linje mellan bildhuvudpunkt och projektionscentrum och dess förlängning i den yttre strålkärven
Kamerakalibrering (13.3.4)	uppmätning av en mätkameras inre geometri
Kamerakonstant (13.3.4)	avstånd mellan projektionscentrum och bildplan
Kartprogram (15.1.1)	planeringsdokument för storskalig kartframställning
Kolinearitets (13.3.5)	förhållandet att bildpunkt, projektionscentrum och objektunkt ligger på rät linje
Konnektionspunkt (14.2.4)	en i flera bilder i ett block mätbar naturlig punkt med okänt plan- och höjdläge, avsedd att skapa kolineariteter och därigenom knyta ihop bilder vid blocktriangulering
Koplanaritet (14.2.3)	förhållandet att projektionscentra och homologa bildpunkter i ett stereobildpar kan bringas i ett och samma plan
Laserskanning (15.2.1, 15.4.5)	uppmätning av ytform med hjälp av högfrekventa laserpulser
Lodbild (13.3.1)	flygbild med approximativt lodrät kameraaxel
Mobile mapping (15.4.5)	fotogrammetrisk mätning med digital stereokamera och integrerat navigationssystem på fordon
Modellkoordinater (14.2.1)	tredimensionella koordinater i lokalt system, beräknade ur mätta bildkoordinater
Mätkamera (13.3.3)	kamera med känd inre orientering
Mätmärke (14.2.1)	märke som stereoskopiskt uppfattas som ryddmärke tillsammans med en stereomodell
Mätosäkerhet (14.3, 15.4.4)	Kvalitetsmärkning av mätningar, utgående från statistisk teori
Nadirpunkt (13.3.4)	skärningspunkt mellan lodlinjen genom projektionscentrum och markplanet
Naturlig stödpunkt (15.1.4)	ej signalerad stödpunkt
Normalfallet (14.2.2, 15.4.2)	stereofotografering med parallella kameraaxlar, vinkelräta mot basen
Omdrevsfotografering (15.3.1)	regelbundet återkommande flygfotografering i form av myndighetsuppdrag
Ortofoto (14.1.3)	flygbild som pixelvis rektifierats till ortogonalprojektion
Ortogonalprojektion (13.3.1)	avbildning i ett plan genom projektion med räta linjer, vinkelräta mot planet
Parallax i bildpar (14.2.1)	skillnad i bildkoordinater mellan en bilddetaljs lägen i vänster resp. i höger bild i ett stereobildpar
Pixel	se Bildelement
Planskanner (13.2.3)	bildskanner i vilken bilden eller kartan läggs in plant

Primärkartverk (15.1.1)	storskaligt, grundläggande kartverk för kommunal planering och infrastrukturplanering
Projektionscentrum	se Centralprojektion
Radiell höjddeplacering (13.3.2)	lägesförskjutning i centralprojektion på grund av objektets höjdläge
Radiell felteckning (13.3.4)	radiell skillnad mellan inre och yttre strålkärvens geometri vid centralprojektion
Rammärken (13.3.4)	märken i en fotografisk mätbils hörn och/eller sidor, som definierar bildhuvudpunktens läge
Refraktion (13.3.4)	brytning av ljusstrålar i atmosfären
Rektifiering (14.1.2)	omprojicering av lod- eller snedbild till sträng lodbild
Relativ orientering (14.2.3)	förfarande för att återskapa det relativa läget mellan de två bilderna i ett stereobildpar
Signalering (15.1.4)	tydliggörande av markpunkter med vita skivor e.d. för att göra dem synliga i bilder
Stereobildpar (14.2.1)	bildpar med stereoskopisk övertäckning
Stereokamera (15.4.1)	två kameror, parallellt monterade på en bas
Stereomodell (14.2.1)	tredimensionell optisk eller numerisk rekonstruktion av stereoskopiskt avbildade objekt
Stereoseende (14.2.1)	förmåga till tredimensionellt seende, även i stereoskopiska bildpar
Stereoskop (14.2.1)	optisk utrustning för att underlätta stereoseende i bildpar
Stråk	se Bildstråk resp. Flygstråk
Stråkplanering (15.1.3)	planering av flygfotografering för kartframställning
Sträng lodbild (13.3.1)	flygbild med absolut lodrät kameraaxel
Stöd	samtliga stödpunkter i ett block, i en modell eller i en bild
Stödpunkt (15.1.4)	en i bilder identifierbar punkt med känt plan- och/eller höjdläge, avsedd för blocktriangulering, för absolutorientering av stereomodell eller för enkel-punktsinskränning
Vertikalparallax	se Y-parallax
X-parallax (14.2.1)	parallaxens komponent parallellt med bildkoordinataxeln x, dvs. i basens riktning, horisontalparallax
Y-parallax (14.2.1)	parallaxens komponent parallellt med bildkoordinataxeln y, dvs. vinkelrätt mot basen, vertikalparallax
Yttre orientering (13.3.4)	projektionscentrums läge och den yttre strålkärvens riktning vid exponering av en bild
Övertäckning (14.2.1)	den procentandel av två angränsande bilder, som avbildar samma del av objektet (landskapet)

Förkortningsregister

A

AGA (*Aktiebolaget Gasaccumulator*; Svenskt industriföretag som tillverkade de första elektrooptiska längdmätningssinstrumenten)

AS (*Anti Spoofing*; en typ av avsiklig störning i satellitsignalen för GPS)

B

BIPM (*Bureau International des Poids et Mesures*; Internationella byrån för mått och vikt)

C

C/A-kod (*Coarse Acquisition kod*; kod i GPS-signal)

CAD-program (*Computer-aided design*; Ritningsprogram för bl.a. 3D-visualisering)

D

DLL (*Delay Lock Loop*)

DOP (*Dilution Of Precision*; Kvalitetsmått för GPS-beräkningar)

E

EDM (*Electromagnetic Distance Measurement*)

ETRS 89 (*European Terrestrial Reference System 1989*)

EVRF 2007 (*European Vertical Reference Frame 2007*)

F

FLS (*Flygburen laserskanning*)

G

GIS (*Geografiska Informationssystem*; datorbaserat informationssystem innehållande geodata)

GLONASS (*Global Navigation Satellite System*)

GNSS (*Global Navigation Satellite System*; ett samlingsnamn för flera satellitsystem – bl.a. GPS, det ryska GLONASS och det europeiska GALILEO)

GPS (*Global Positioning System*; ett amerikanskt satellitsystem för navigering och positionsbestämning)

GRS 80 (*Geodetic Reference System 1980*)

GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*)

H

HMK (*Handbok till Mätningkungörelsen; efter Mätningkungörelsens avveckling 1 juli 2010 har förkortningens uttydning ändrats till "Handbok i mät- och kartfrågor"; se <http://www.lantmateriet.se/hmk>*)

I

IGS (*International GNSS service*)

IR (infrarött ljus)

ISO (International Organization for Standardization)

ITRF (International Terrestrial Reference Frame)

J

JCGM (Joint Committee for Guides in Metrology)

M

MP (*Multi path; flervägsfel i GNSS-mätningar*)

N

NAP (*Normaal Amsterdams Peil; nollpunkt för flera europeiska höjdsystem*)

NAVSTAR (*Navigation System with Timing And Ranging*)

NKG2015 (*Gravimetrisk geoidmodell*)

P

P-kod (*Precise, eller Protected kod; kod i GPS-signal*)

PLL (*Phase Lock Loop*)

PPP (*Precise Point Positioning; en mätmetod för GNSS*)

PRN (*Pseudorandom noise*)

PZ-90 (Referenssystem som används av det ryska satellitpositioneringssystemet GLONASS)

R

RH 00 (Rikets Höjdsystem 1900)

RH 70 (Rikets Höjdsystem 1970)

RH 2000 (Rikets Höjdsystem 2000)

RINEX (*Receiver Independent Exchange Format; standardiserat utbytesformat för*

GPS-observationer)

RT 90 (Rikets Triangelnät 1990)

RTK (*Real Time Kinematic*; i dag den vanligaste metoden för GNSSfasmätning i realtid)

RUFRIS (*Realtidsuppdaterad Fri Station*; metod för bestämning av fri station med en kombination av konventionell mätning och mätning med satellitteknik)

S

SA (*Selective Availability*; en typ av avsiklig störning i satellitsignalen för GPS)

SWEN17_RH2000 (En geoidmodell som är anpassad till SWEREF99 och höjdsystemet RH 2000)

SWEPOS (Ett nationellt nät av fasta referensstationer för GPS)

SWEREF 99 (Det officiella geodetiska referenssystemet i plan i Sverige)

SWEREF 99 TM (Projicering av SWEREF 99)

T

TEC (*Total Electron Content*)

TLS (*Terrester laserskanning*)

U

UPS (*Universal Polar Stereographic*)

UTC (*Universal Time Coordinated*; ett referenssystem för tidmätning)

UTM (*Universal Transversal Mercator*)

W

WGS 84 (World Geodetic System 1984)